

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE E FONDAMENTI DI BIOSTATISTICA

2. Insiemi numerici

A. A. 2014-2015

L.Doretti

INSIEMI NUMERICI

rappresentano la base su cui la matematica si è sviluppata

costituiscono le tappe di uno dei più importanti cammini della conoscenza

Lo *sviluppo storico* dei numeri è diverso dalla *sistemazione* effettuata *a posteriori* che parte da numeri naturali, **N**, passa attraverso i numeri interi relativi, **Z**, i numeri razionali, **Q**, ed arriva ai numeri reali, **R**.

NUMERI NATURALI

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$$

- Servono per contare

Struttura algebrica

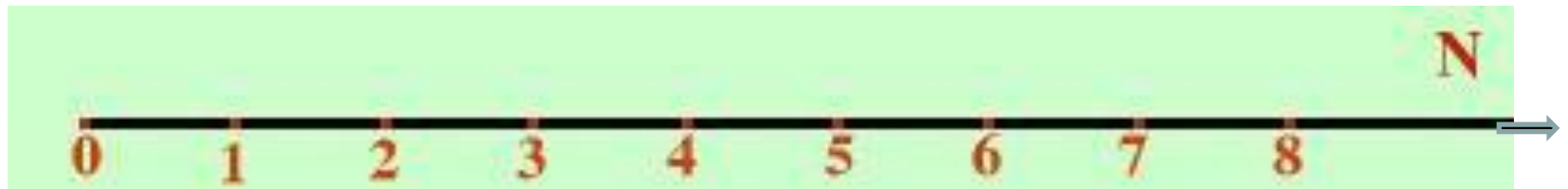
- In $\mathbb{N}$ sono sempre eseguibili le operazioni di ***addizione*** e di ***moltiplicazione***, mentre questo non accade per la sottrazione e per la divisione

Numeri Naturali

Struttura di ordine

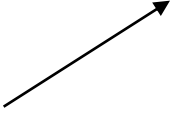
- La relazione $\leq$ ordina in modo lineare l'insieme $\mathbb{N}$:
ogni naturale corrisponde ad un punto su una retta orientata

(in $\mathbb{N}$ esistono: il *minimo* elemento, ma non il massimo; il *successivo* di ogni numero; il *precedente* di ogni naturale >0)



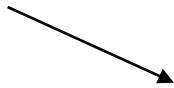
NUMERI INTERI RELATIVI

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, - (n+1), -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots \}$$



Rendere sempre
eseguibile la sottrazione
(*motivazione matematica*)

Sono stati introdotti per



Disporre di una scala numerica illimitata in entrambi i sensi
(*esigenza applicativa*)

Come si costruisce l'insieme $\mathbb{Z}$?

Si raddoppia $\mathbb{N} - \{0\}$ e si introducono nuovi simboli per indicare gli elementi nuovi: $(\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+ \text{ e } \mathbb{N} \subset \mathbb{Z})$

Struttura di ordine

- Si introduce un ***ordine lineare*** che permette di rappresentare su una retta orientata gli elementi di Z

(non esiste né massimo, né minimo; *esistono il successivo e il precedente di ogni numero*)



Struttura algebrica

- Si ridefiniscono le **operazioni di addizione e moltiplicazione**: esse sono sempre eseguibili in $\mathbb{Z}$
- Ogni numero relativo **b** ha l'**opposto**, indicato con **$-b$**



E' sempre eseguibile la **sottrazione** :

per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$ $a - b = a + (-b)$

NUMERI RAZIONALI

Sono stati introdotti per

Rendere sempre eseguibile la divisione $a:b$ (con a, b interi e $b \neq 0$) anche quando a non è multiplo di b (*motivazione matematica*)

Esprimere le misure di grandezze qualsiasi che non sono multipli dell'unità di misura (*esigenza applicativa*)

Numeri razionali: rappresentazione

$$Q = \{a/b : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$$

- I numeri razionali sono quei numeri che si ottengono dal quoziente tra due interi, ed è quindi possibile esprimerli con frazioni a/b , dove $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ (**forma frazionaria**)
- Ci sono infinite frazioni che rappresentano lo stesso numero razionale (a/b e c/d esprimono lo stesso razionale sse $ad = cb$): si usa rappresentare un *numero razionale* con la frazione ridotta ai minimi termini e con denominatore positivo
- I **numeri interi** sono riconoscibili nelle frazioni della forma $a/1$, con $a \in \mathbb{Z}$, quindi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Numeri razionali: rappresentazione

- Applicando la cosiddetta “**divisione con virgola**”, i numeri razionali, non interi, si possono anche esprimere in **forma decimale** (*numeri con virgola*)
 - *con un numero finito di cifre decimali (numeri decimali finiti)*
 - *con un numero infinito di cifre decimali, che si ripetono in modo ciclico (numeri decimali periodici)*
- Ogni **numero razionale** è un numero intero o un numero decimale finito o periodico
- Si dispone di algoritmi per passare dalla forma frazionaria alla forma decimale e viceversa.

Struttura algebrica

- Si ridefiniscono le operazioni di **addizione**, **sottrazione** e **moltiplicazione**: sono sempre eseguibili in $\mathbb{Q}$.
- Ogni numero razionale $b \neq 0$ ha **inverso**, indicato con b^{-1}
(se $b = m/n$ e $b \neq 0$ allora $m \neq 0$ e quindi esiste la frazione inversa: $b^{-1} = n/m$)

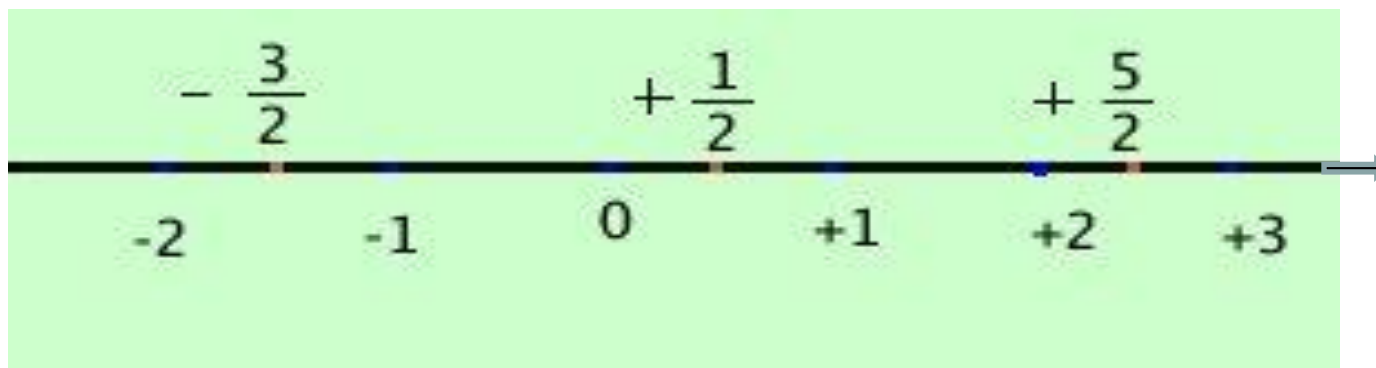
E' sempre eseguibile in $\mathbb{Q}$ anche la **divisione** (con divisore diverso da 0):

$$\text{per ogni } a, b \in \mathbb{Q} \text{ e } b \neq 0 \qquad a:b = a \cdot b^{-1}$$

$$(\text{se } a = r/s \text{ e } b = m/n, \text{ allora } a \cdot b^{-1} = (r/s) \cdot (n/m))$$

Struttura di ordine

Si introduce un **ordine lineare** che permette di rappresentare su una retta orientata gli elementi di $\mathbb{Q}$



A differenza di $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, l'ordine di $\mathbb{Q}$ è **denso**: tra due razionali distinti esistono infiniti altri razionali



non esiste il successivo di un numero razionale!

Incompletezza di $\mathbb{Q}$

Con i numeri razionali, è risolto il problema della misura?

Tramite i numeri razionali si possono ottenere misure ben approssimate quanto si voglia (è possibile scendere al di sotto di ogni margine di errore, per quanto piccolo):
ciò è più che sufficiente nella pratica effettiva della misura

Con i numeri razionali è anche possibile ottenere in ogni caso misure esatte?

**Problema teorico, ma ben posto ...
e lo fu per i Pitagorici!**

Incompletezza di $\mathbb{Q}$

- La risposta è negativa: *esistono segmenti la cui misura rispetto al segmento unitario non è esprimibile con un numero razionale*



- *Esistono punti su una retta orientata che non corrispondono ad alcun numero razionale*: il segmento OP avente lunghezza pari alla **diagonale del quadrato** costruito sul segmento unitario OU non è il corrispondente di alcun numero razionale

$\sqrt{2}$ non è un numero razionale!

- Cantor ha dimostrato che l'insieme dei punti di una retta orientata che non corrispondono a nessun razionale è un'infinità “**molto più grande**” dell'insieme dei punti che gli corrispondono:

la densità di $\mathbb{Q}$

non è sufficiente ad etichettare tutti i punti della retta

- Per avere un numero in corrispondenza di ogni punto, e quindi per poter misurare esattamente ogni segmento, è necessaria una *proprietà più forte* che è detta *completezza*: *il nuovo insieme numerico deve “completare” la retta*
- $\mathbb{Q}$ non la possiede e questo impone di passare ad un insieme numerico più ricco: l'insieme **$\mathbb{R}$** dei **numeri reali**

NUMERI REALI

L'immagine intuitiva su cui basarsi per introdurre i numeri reali *non è di natura aritmetica*, ma geometrica

**I numeri reali vengono individuati
a partire dai punti di una
retta orientata r**

*P punto della semiretta
positiva di r*

$P \leftrightarrow$ *numero razionale
positivo* se OP e OU
(unità) sono
commensurabili

$P \leftrightarrow$ *numero irrazionale
positivo* se OP e OU
(unità) sono
incommensurabili

*P punto della semiretta
negativa di r*

$P \leftrightarrow$ *numero razionale o
irrazionale negativo, opposto
del numero* corrispondente
al punto P', simmetrico di P
rispetto ad O

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali

Indicato con $\mathbb{I}$ l'insieme dei *numeri irrazionali*, si definisce **insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali**:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

- I numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta :

“insieme dei numeri reali” o “retta reale”

“numero reale” o “punto della retta”

I numeri reali risolvono completamente il problema della misura

Rappresentazione dei reali

Come denotare i numeri reali irrazionali?

I *numeri reali irrazionali* hanno una *rappresentazione decimale, non finita e non periodica*

- La conoscenza completa di un numero irrazionale è *impossibile*
- Si dimostra che *non può esistere un algoritmo* per denotare individualmente tutti i numeri irrazionali

Struttura algebrica e di ordine

- L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è dotato di una **struttura algebrica** (che consente di eseguire i consueti calcoli) e di un **ordinamento** che permette di confrontare tra loro due qualunque numeri reali
- I reali sono il punto di arrivo degli *insiemi numerici ordinati in modo lineare*:

$\mathbb{R}$ è un insieme denso e completo

Come si opera con i numeri reali?

Ogni numero irrazionale può essere approssimato a piacere, sia per difetto che per eccesso, da numeri razionali

Ad esempio:

$$1 < 1,4 < 1,41 < 1,414 < \dots < \sqrt{2} < \dots < 1,415 < 1,42 < 1,5 < 2$$

$$3 < 3,1 < 3,14 < 3,141 < \dots < \pi < \dots < 3,142 < 3,15 < 3,2 < 4$$

- **Anche i calcoli avvengono per approssimazione:** un numero irrazionale è *approssimato in modo opportuno da un razionale*
- Un aiuto viene dal **calcolo letterale**: *un numero irrazionale si indica con una lettera e si opera algebricamente su di esso, rimandando la conversione numerica a calcoli avvenuti in modo da evitare l'accumularsi degli errori di approssimazione*

Legame tra struttura d'ordine e struttura algebrica in $\mathbb{R}$: proprietà delle disuguaglianze

$a \leq b$ implica

$$a + c \leq b + c \text{ per ogni } c$$

$$a - c \leq b - c \text{ per ogni } c$$

$$ac \leq bc \text{ per ogni } c > 0$$

$$\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c} \text{ per ogni } c > 0$$

$$-a \geq -b$$

$$ac \geq bc \text{ per ogni } c < 0$$

$$\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c} \text{ per ogni } c < 0$$

$$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \text{ se } 0 < a \leq b \text{ oppure } a \leq b < 0$$

$$\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b} \text{ se } a < 0 < b$$

Valore assoluto e sue proprietà

Per ogni numero reale a , si definisce ***valore assoluto*** di a :

$$|a| = a \quad \text{se } a \geq 0$$

$$|a| = -a \quad \text{se } a < 0$$

Proprietà del valore assoluto

1. $|a| \geq 0$

2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ e $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

3. $|a + b| \leq |a| + |b|$

Esercizi

- 1.** Per ciascuna disequazione, determinare i valori reali di x che la soddisfano, distinguendo il caso $a > 0$, $a = 0$ e $a < 0$:

$$|x| < a \quad |x| > a$$

- 2.** Determinare le soluzioni in $\mathbb{Z}$ di ciascuna delle seguenti disequazioni:

a)
$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{15}{2}$$

b)
$$|1 - x| > 2$$

Potenze

Esponente naturale o intero relativo

Siano x reale non nullo, m naturale. Si definisce:

$$x^0 = 1 \quad x^1 = x \quad x^m = x \cdot x \cdot \dots \cdot x \text{ (} m \text{ volte) se } m > 1$$

$$x^{-m} = (1/x)^m = 1/x^m \text{ (in particolare } x^{-1} = 1/x, \text{ reciproco di } x)$$

Esponente razionale

Siano x reale positivo, m intero, n intero positivo, si definisce:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Tale definizione si estende agli esponenti razionali negativi, ponendo:

$$x^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$$

Proprietà delle potenze

Per ogni x, y reali positivi, per ogni a, b razionali
(e più in generali, reali) si ha:

a) $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$

b) $x^a : x^b = x^{a-b}$

c) $(x^a)^b = x^{ab}$

d) $(xy)^a = x^a \cdot y^a$

e) $(x/y)^a = x^a / y^a$

Esercizi

1. Calcolare il seguente prodotto applicando le proprietà delle potenze:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

2. Per ogni scelta dei numeri a, b, p, q (con a, b, p e q diversi da zero), l'espressione

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{-1}$$

è uguale ad una soltanto delle seguenti espressioni. Quale?

$$\text{i) } \left(\frac{ap}{bq}\right)^{-1} \quad \text{ii) } \frac{b}{q} \left(\frac{a}{p}\right)^{-1} \quad \text{iii) } \frac{a}{p} \left(\frac{q}{b}\right)^{-1} \quad \text{iv) } \left(\frac{pb}{aq}\right)^{-1}$$

Un'applicazione interessante delle potenze: calcoli con numeri in notazione scientifica

Ogni numero reale positivo x può essere scritto in ***notazione scientifica***, cioè nella forma:

$$x = a \cdot 10^b$$

dove $a \in R, 1 \leq a < 10$ e $b \in Z - \{0\}$

a è detta ***mantissa di x***

b è detto ***esponente di x***

Utilità della notazione scientifica

- Per numeri molto grandi, o molto piccoli, *evita di dover scrivere molti zeri* e ne *facilita la comprensione*
- *Permette più facilmente il confronto*: due numeri che hanno lo stesso esponente in notazione scientifica sono più o meno dello stesso **ordine di grandezza** (il numero più grande non è superiore a 10 volte il più piccolo)

Operazioni in notazione scientifica: addizione e sottrazione

Dati $x_1 = a_1 \cdot 10^{b_1}$ e $x_2 = a_2 \cdot 10^{b_2}$

per trovare la **somma** o la **differenza**, si portano i numeri allo *stesso esponente*, ad esempio moltiplicando e dividendo x_2 per 10^{b_1}

$$x_2 = a_2 \cdot 10^{b_2} = a_2 \cdot (10^{b_2} \cdot 10^{-b_1}) \cdot 10^{b_1} = (a_2 \cdot 10^{b_2 - b_1}) \cdot 10^{b_1}$$

- si sommano o sottraggono le mantisse mantenendo lo stesso esponente

$$x_1 \pm x_2 = (a_1 \pm a_2 \cdot 10^{b_2 - b_1}) \cdot 10^{b_1}$$

- si scrive il risultato in notazione scientifica

Operazioni in notazione scientifica: moltiplicazione e divisione

Per trovare il **prodotto** o il **quoziente** di

$$x_1 = a_1 \cdot 10^{b_1} \text{ e } x_2 = a_2 \cdot 10^{b_2}$$

grazie alle proprietà delle potenze, è sufficiente:

- *moltiplicare o dividere le mantisse*
- *sommare o sottrarre gli esponenti*
- *scrivere il risultato in notazione scientifica*

Esercizio 1

Il virus *herpes simplex* è costituito dal nucleo e da due rivestimenti proteici del nucleo stesso.

Il nucleo ha massa $2 \cdot 10^{-16}$ g, mentre i due rivestimenti hanno massa, rispettivamente, $5 \cdot 10^{-16}$ g e $1,3 \cdot 10^{-15}$ g.

Calcolare la massa del virus *herpes simplex*.

Risposta: $2 \cdot 10^{-15}$ g

Esercizio 2

Un atomo di idrogeno ha massa di circa $1,7 \cdot 10^{-27}$ g ed un atomo di ossigeno ha massa di circa $2,65 \cdot 10^{-26}$ g.

Calcolare la massa di una molecola di acqua H_2O (composta da un atomo di ossigeno e di due di idrogeno).

Risposta: $2,99 \cdot 10^{-26}$ g

Esercizio 3

La popolazione umana è di circa 6 miliardi di persone. Ogni persona ha mediamente 5,6 litri di sangue (1 litro è pari a 1 dm^3).

Determinare il volume totale (in m^3) del sangue umano presente nel mondo.

Risposta: $3,36 \cdot 10^7 \text{ m}^3$

Percentuali

- Le percentuali si usano ogni volta che si vogliono confrontare due quantità dello stesso tipo, segnalando che una delle due è una certa frazione dell'altra
- Una **percentuale** è una frazione con denominatore 100 (e *numeratore non necessariamente intero*):

y è il p% di x sse $y = \left(\frac{p}{100}\right)x$ **sse** $\frac{y}{x} = \frac{p}{100}$

In particolare:

considerare una *percentuale* $p\%$ di una quantità x
equivale a ***moltiplicare*** x per $\frac{p}{100}$

Ricordare che:

- il calcolo di una percentuale è sempre una *moltiplicazione*
- una percentuale è sempre la *percentuale di qualcosa*

Date le quantità x e y , per trovare quale percentuale p di x è la quantità y basta fare:

$$p = \frac{y}{x} \cdot 100$$

Esempio

Uno stato ha una popolazione di 25 milioni di abitanti, dei quali 200 000 sono stranieri.

Quale è la percentuale di stranieri rispetto all'intera popolazione?

$$p = \frac{2 \cdot 10^5}{25 \cdot 10^6} \cdot 100 = \frac{8 \cdot 10^7}{10^2 \cdot 10^6} = \frac{8}{10} = 0,8$$

Cosa significa:

“la quantità x è aumentata (o diminuita) del p%”?

Risposta

Significa che la quantità finale y è data da:

$$y = x + \frac{p}{100}x = \left(1 + \frac{p}{100}\right)x \quad \text{oppure} \quad y = x - \frac{p}{100}x = \left(1 - \frac{p}{100}\right)x$$

quindi x è *moltiplicato per* $1 + \frac{p}{100}$

oppure x è *moltiplicato per* $1 - \frac{p}{100}$

Cosa capita se una quantità aumenta prima del p % e poi del q%?

***Si può affermare che l'aumento finale è del (p + q)%?
Perché?***

Risposta

Se una quantità x è aumentata prima del $p\%$ e poi del $q\%$, il suo valore finale è:

$$y = \left(1 + \frac{q}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right)x = \left(1 + \frac{p + q + \frac{pq}{100}}{100}\right)x \neq \left(1 + \frac{p + q}{100}\right)x$$

... quindi l'aumento finale è del $\left(p + q + \frac{pq}{100}\right)\%$

e non del $(p + q)\%$!

Segue che: un aumento del p%, seguito da una diminuzione del p%, ***non riporta al punto di partenza ...***

Esempio Consideriamo un aumento del 50% seguito da una diminuzione del 50% di una quantità x. Si ha:

$$y = \left(1 - \frac{50}{100}\right)\left(1 + \frac{50}{100}\right)x = \left(1 - \frac{50 \cdot \frac{50}{100}}{100}\right)x = \frac{75}{100}x$$

Nota

Poiché la moltiplicazione è commutativa, aumentare (o diminuire) prima del p% e poi del q% è la stessa cosa dell'aumentare (o diminuire) prima del q% e poi del p%.

Esercizi

1. La popolazione di una città aumenta del 20% nel 2008 e poi del 30% nel 2009.

Di quanto è aumentata complessivamente la popolazione nel biennio 2008-2009?

Risposta: 56%

2. In un negozio di abbigliamento ho pagato c euro una maglietta a cui era stato applicato uno sconto del 30%.

Quale operazione devo svolgere per ottenere il prezzo della maglietta prima dello sconto?

- A) moltiplicare il prezzo c per $100/70$
- B) moltiplicare il prezzo c per $130/100$
- C) sommare al prezzo c il 70% di c
- D) sommare al prezzo c il 30 % di c

Risposta: A

3. Una popolazione di cavie è infettata con una malattia che provoca la morte del 4% delle cavie la prima settimana e del 6% delle cavie la seconda settimana.

Quale percentuale delle cavie è ancora viva dopo 2 settimane?

E se fossero morte il 6% la prima settimana e il 4% la seconda settimana?

Risposta: 90,24%