

***ISTITUZIONI DI MATEMATICHE E FONDAMENTI DI
BIOSTATISTICA***

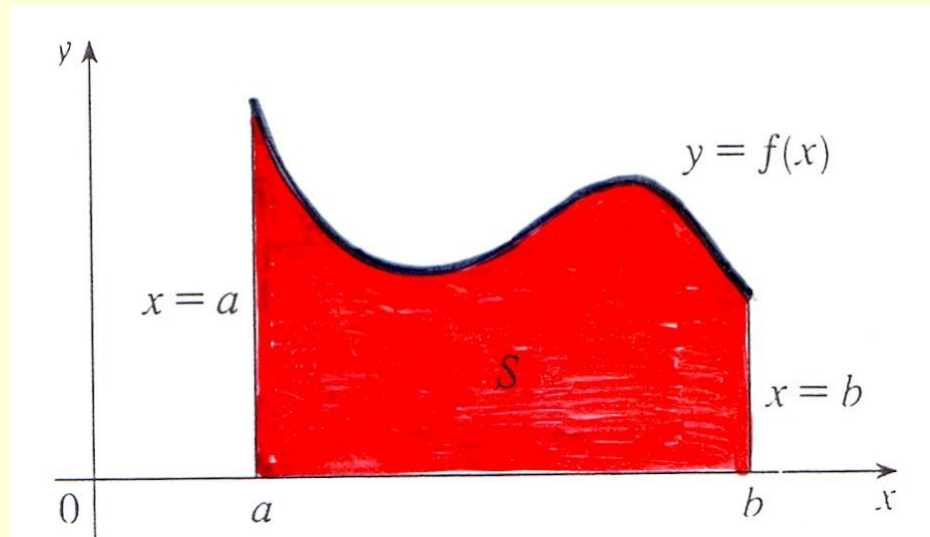
**10. CALCOLO INTEGRALE:
L'INTEGRALE DEFINITO**

A. A. 2014-2015

L. Doretti

IL PROBLEMA DELL'AREA

- *Determinare l'area della regione S di piano compresa tra il grafico di una funzione continua f definita in $[a, b]$, e con $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, e le rette verticali $x = a$ e $x = b$.*



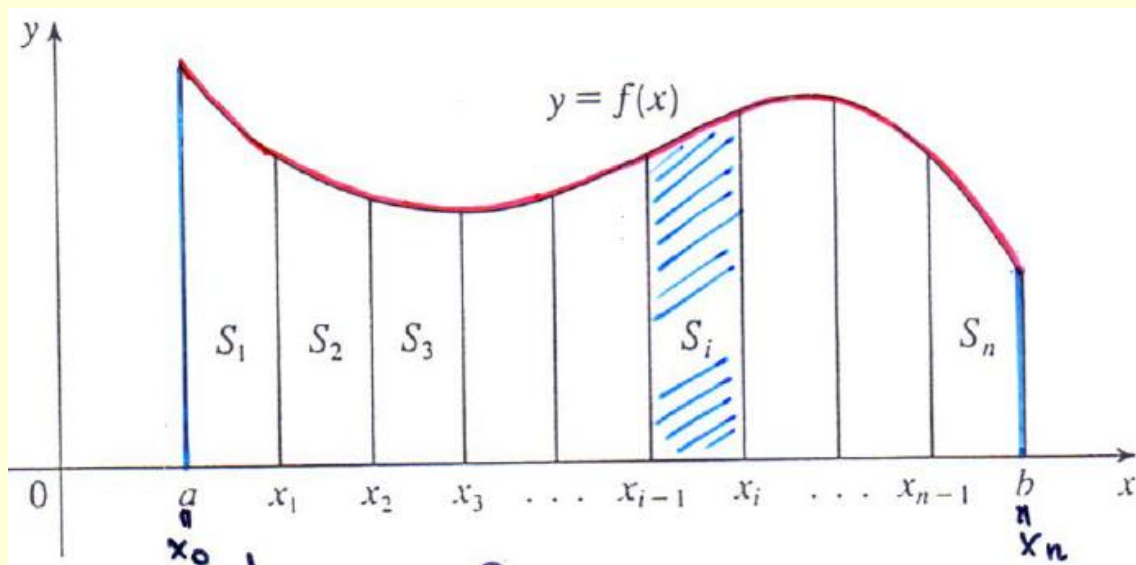
$$S = \{(x, y) / a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

- Non è affatto semplice determinare l'area di regioni delimitate da contorni curvilinei.
- Abbiamo tutti un'idea intuitiva di cosa sia l'area di una regione di piano, ma parte del problema dell'area è proprio quello di *precisare l'idea intuitiva* con una definizione esatta di area.

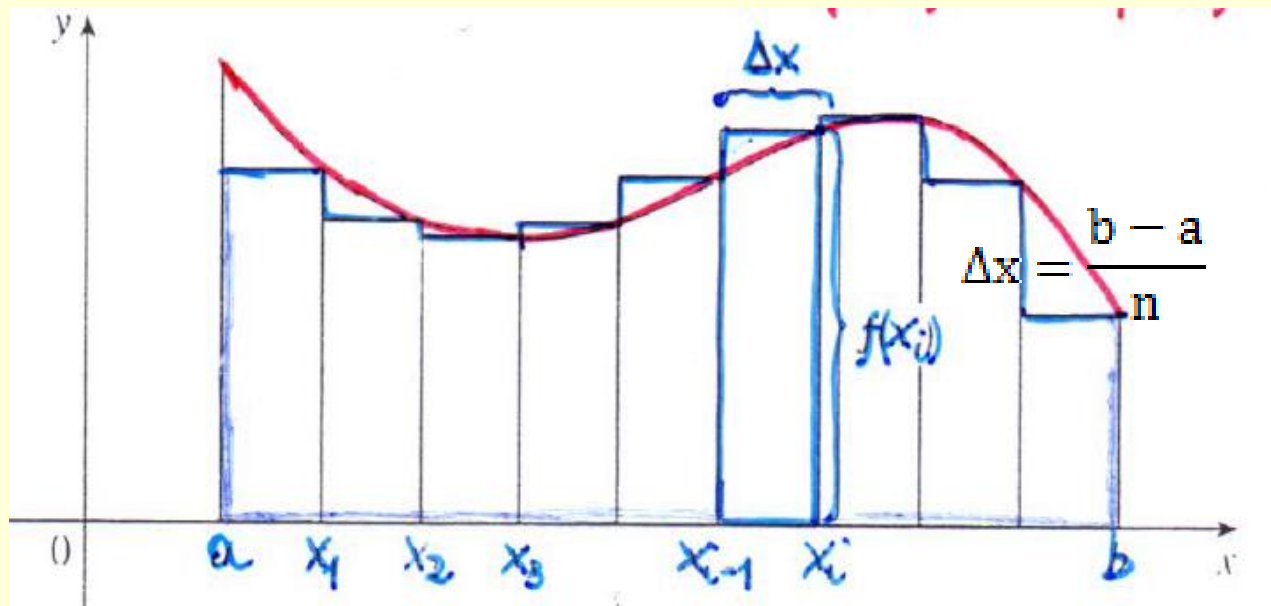
Per l'area si seguirà una procedura simile a quella utilizzata per definire la *pendenza della retta tangente* ad una curva in un punto: prima si era approssimato la *pendenza della tangente* con le *pendenze di rette secanti* e poi si era considerato il limite di queste approssimazioni.

Per definire l'*area* della regione S , prima si approssimerà S con *rettangoli* (cioè semplici figure di cui è facile calcolare l'area) e poi si considererà il limite delle aree di tali rettangoli

A tale scopo, si divide la regione S in n strisce $S_1, S_2, \dots, S_n$ di uguale ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$



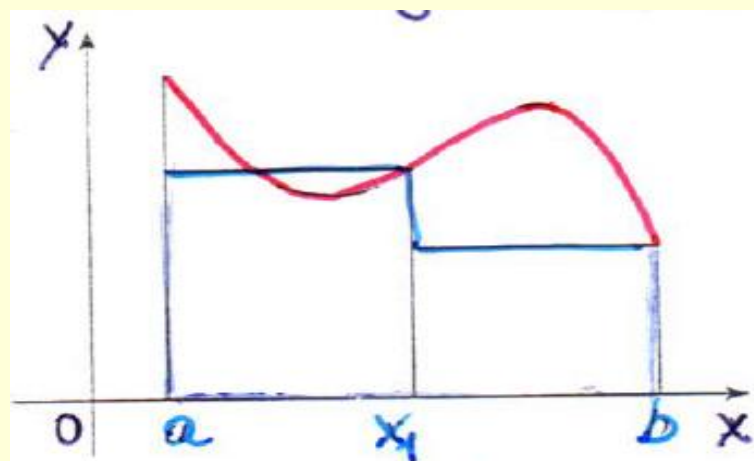
- Si approssima la i -esima striscia S_i , con un *rettangolo* di base Δx e altezza, $f(x_i)$, dove x_i è l'estremo destro dell' i -esimo intervallo $[x_{i-1}, x_i]$.



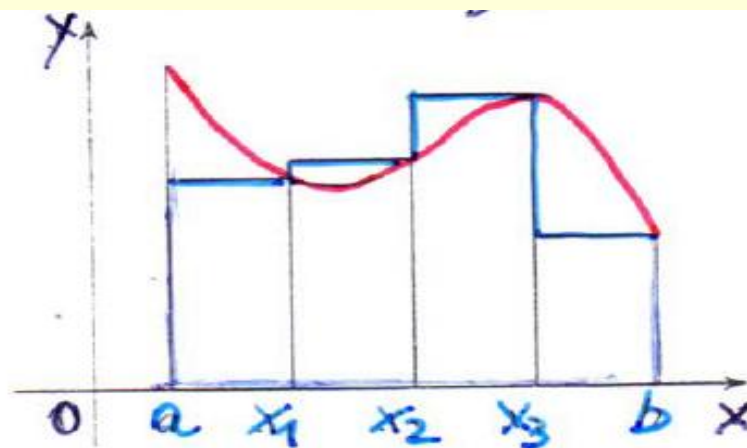
- Il numero che pensiamo intuitivamente come area di S è approssimato dalla somma R_n delle aree di questi rettangoli:

$$R_n = f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n) \cdot \Delta x$$

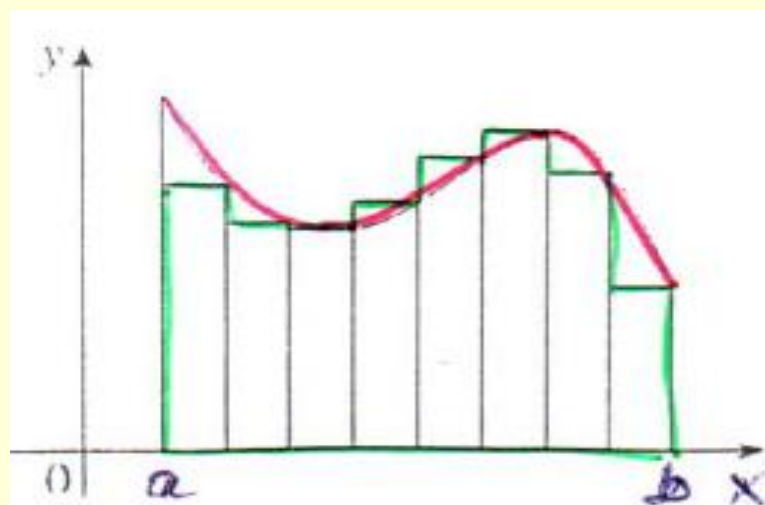
- Le approssimazioni sono migliori al crescere di n , cioè per $n \rightarrow \infty$



(a) $n = 2$



(b) $n = 4$



(c) $n = 8$



(d) $n = 12$

Per tale ragione, è naturale definire l'area A della regione S come il limite della somma delle aree dei rettangoli approssimanti, ovvero:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_n) \cdot \Delta x]$$

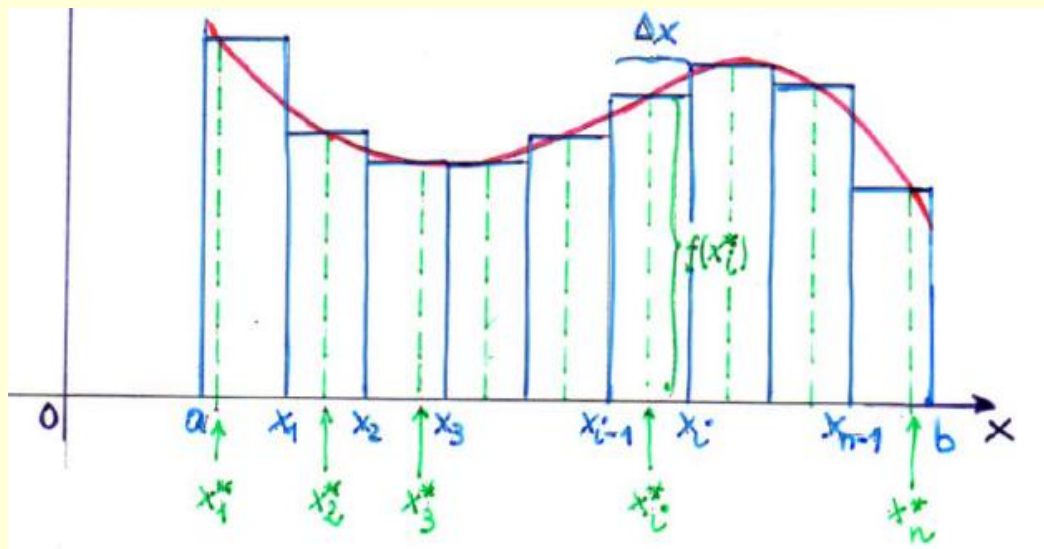
Si può dimostrare che:

- *tale limite esiste sempre se f è continua*
- *si ottiene lo stesso valore del limite se si considera l'estremo sinistro degli intervalli*

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x_0) \cdot \Delta x + f(x_1) \cdot \Delta x + \cdots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x]$$

DEFINIZIONE DI AREA

Più in generale, invece di usare gli estremi dei sottointervalli, si può prendere come altezza dell'i-esimo rettangolo il valore $f(x_i^*)$ che la funzione f assume in un punto x_i^* dell'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$, scelto ad arbitrio. I punti $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ sono detti *punti base*.



Si ha allora la seguente definizione per l'**area** A di S :

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x_1^*) \cdot \Delta x + f(x_2^*) \cdot \Delta x + \dots + f(x_n^*) \cdot \Delta x] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x$$

Il tipo di limite che compare quando si definisce un'area si incontra in molte altre situazioni (anche quando f non è necessariamente positiva).

Ad esempio:

- *per trovare la **distanza** percorsa da un oggetto in un certo intervallo di tempo, conoscendo la sua velocità in ogni istante*
- *per misurare **lunghezze di curve***
- *per determinare **volumi di solidi***
- *per definire il concetto fisico di **lavoro compiuto da una forza** per uno spostamento da un punto di ascissa $x=a$ ad un punto di ascissa $x=b$*

E' allora naturale introdurre un nome ed una notazione speciale per questo tipo di limiti

INTEGRALE DEFINITO

Definizione (secondo Riemann)

Sia f una funzione continua definita in $[a, b]$, non necessariamente positiva. Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n sottointervalli di uguale ampiezza $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e siano $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ gli estremi dei sottointervalli.

Considerati n punti $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ in modo che, per ogni i , x_i^* appartenga all' i -esimo sottointervallo $[x_{i-1}, x_i]$, si definisce **integrale definito di f da a in b** nel modo seguente:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x$$

Poiché f è continua, si può dimostrare che l'integrale definito esiste sempre ed il suo valore non dipende dalla scelta dei punti base $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$.

- Il simbolo $\int$ è stato introdotto da Leibniz e si chiama *segno di integrale*. Si presenta come una “S” allungata e fu scelto perché un integrale è il limite di una somma.
- Nella notazione $\int_a^b f(x)dx$ $f(x)$ è detta *funzione integranda*, mentre a e b sono detti *estremi di integrazione*: a è l'estremo inferiore e b è l'estremo superiore.
- Il simbolo dx di per sé non significa nulla: l'intera espressione $\int_a^b f(x)dx$ è un *unico simbolo*.
- La *procedura di calcolo* dell'integrale si chiama *integrazione*.
- L'*integrale definito* $\int_a^b f(x)dx$ è un numero e non dipende da x: si può usare una lettera qualunque al posto di x senza alterare il valore dell'integrale $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

- Se f è una funzione positiva o nulla in $[a, b]$, $\int_a^b f(x) dx$
è il numero che esprime l'area della regione di piano sottesa alla curva tra a e b
- Se f è una funzione negativa in $[a, b]$, $\int_a^b f(x) dx$
è il numero che esprime l'opposto dell'area della regione compresa tra l'asse delle x e il grafico della funzione tra a e b
- Se f assume valori sia positivi che negativi in $[a, b]$, $\int_a^b f(x) dx$
è il numero che esprime la somma delle aree delle regioni “sopra” l'asse x , diminuita della somma delle aree delle regioni “sotto” l'asse x

PROPRIETA' DELL'INTEGRALE DEFINITO

Dalla definizione di integrale definito da a in b (con $a \leq b$) segue:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

(invertendo a con b , Δx cambia di segno poiché passa da $\frac{b-a}{n}$ a $\frac{a-b}{n}$)

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Ulteriori proprietà

1. *Integrale di una costante:* $\int_a^b c dx = c \cdot (b - a)$ con $c \in \mathbb{R}$

2. *Integrale della somma o differenza:*

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

3. *Integrale di un multiplo:*

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

4. *Suddivisione dell'intervallo di integrazione:*

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{per ogni } c \in [a, b]$$

5. *Confronto di integrali:*

Se $f(x) \geq g(x)$ per ogni x in $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

CALCOLO DEGLI INTEGRALI DEFINITI

- Il calcolo di un integrale definito a partire dalla definizione è una procedura, in generale, molto laboriosa e difficile
- Newton scoprì un *metodo molto più semplice* per il calcolo degli integrali definiti e pochi anni dopo Leibniz, in modo indipendente, fece la stessa scoperta

*La loro scoperta costituisce una parte rilevante del
teorema fondamentale del calcolo*

- Il Teorema fondamentale del calcolo merita questo nome proprio perché *stabilisce un legame* tra le due sezioni del calcolo: *il calcolo differenziale* e il *calcolo integrale*.
- Il calcolo differenziale è stato sviluppato a partire dal problema della tangente, mentre il calcolo integrale è stato introdotto a partire dal problema dell'area, a prima vista del tutto indipendente dall'altro.
- Utilizzando gli studi di Torricelli, Barrow, scoprì che questi due problemi sono in realtà strettamente correlati: egli capì che *derivazione ed integrazione sono l'una il processo inverso dell'altra*.
- Il Teorema fondamentale del calcolo esprime in modo preciso la connessione tra derivata ed integrale definito.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

(I parte: di TORRICELLI-BARROW)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ha primitive.

Dimostrazione (cenno)

Si prova che la funzione $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

detta *funzione integrale di f* , è derivabile per ogni $x \in [a, b]$ ed è $F'(x) = f(x)$.

Nota - Questo teorema può essere così scritto: se f è continua, allora

$$D\left(\int_a^x f(t) dt\right) = f(x)$$

In pratica, il teorema ci dice che se prima integriamo f e poi deriviamo il risultato, ritroviamo la funzione di partenza f

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

(II PARTE: formula di NEWTON-LEIBNIZ)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia G una primitiva di f . Allora:

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

Dimostrazione

Dal teorema di Torricelli-Barrow, la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

è una primitiva di f . Poiché due qualunque primitive differiscono per una costante, sia ha $G(x) = F(x) + c$, con

$c \in \mathbb{R}$. Ma allora: $G(b) - G(a) = [F(b) + c] - [F(a) + c] =$

$$= \left(\int_a^b f(t) dt + c \right) - \left(\int_a^a f(t) dt + c \right) = \int_a^b f(t) dt + c - c = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx$$

Dal teorema fondamentale del calcolo, se f è continua in

$[a, b]$, si ha $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$ dove G è tale

che $G'(x) = f(x)$. Ma allora si può anche scrivere:

$$\int_a^b G'(x) dx = G(b) - G(a)$$

In questa versione, il teorema ci dice che se prendiamo una funzione G e prima la deriviamo e poi integriamo il risultato, otteniamo ancora la funzione G di partenza, ma nella forma $G(b)-G(a)$.

Prese insieme, le due parti del teorema fondamentale del calcolo affermano che la derivazione e l'integrazione sono processi inversi: ciascuno annulla l'effetto dell'altro

OSSERVAZIONE

- Il teorema fondamentale è senza dubbio il più importante teorema del calcolo e certamente *uno dei maggiori traguardi raggiunti dalla mente umana*.
- Prima della sua scoperta, dai tempi di Eudosso ed Archimede a quelli di Galileo e Fermat, problemi di *calcolo di aree, volumi e lunghezze di curve* erano così difficili che solo un genio poteva affrontarne la sfida.
- Grazie al metodo sistematico che Newton e Leibniz hanno creato, questi problemi sono diventati accessibili a tutti.

APPLICAZIONI

L'uguaglianza $\int_a^b G'(x) dx = G(b) - G(a)$

che deriva dal teorema fondamentale del calcolo,
si può applicare in svariate situazioni

Vediamo alcuni esempi

1. Se $V(t)$ è il volume dell'acqua contenuta in un serbatoio al tempo t , la sua derivata $V'(t)$ è la velocità con cui l'acqua entra nel serbatoio al tempo t . Quindi

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t) dt = V(t_2) - V(t_1)$$

rappresenta la *variazione della quantità d'acqua* presente nel serbatoio tra t_1 e t_2

2. Se $n'(t)$ è il tasso di crescita di una popolazione, allora

$$\int_{t_1}^{t_2} n'(t) dt = n(t_2) - n(t_1)$$

è *l'accrescimento della popolazione* nel periodo di tempo t_1 e t_2

3. Se un oggetto si muove lungo una traiettoria rettilinea con funzione di posizione $s(t)$, allora la sua velocità è $v(t) = s'(t)$, e quindi:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = s(t_2) - s(t_1)$$

è il cambiamento di posizione, o *spostamento*, dell'oggetto nell'intervallo di tempo fra t_1 e t_2 .

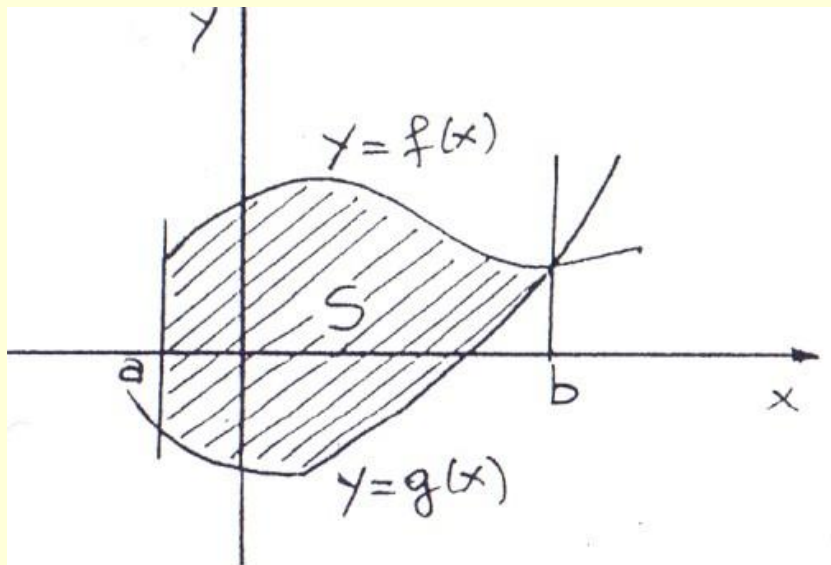
4. L'accelerazione di un oggetto è $a(t) = v'(t)$, quindi

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t) dt = v(t_2) - v(t_1)$$

è la *variazione della velocità* tra l'istante t_1 e l'istante t_2 .

APPROFONDIMENTI SULLE AREE

Gli integrali definiti sono anche utilizzati per determinare l'area di regioni di piano più generali, a partire da quelle regioni che sono comprese tra i grafici di due funzioni



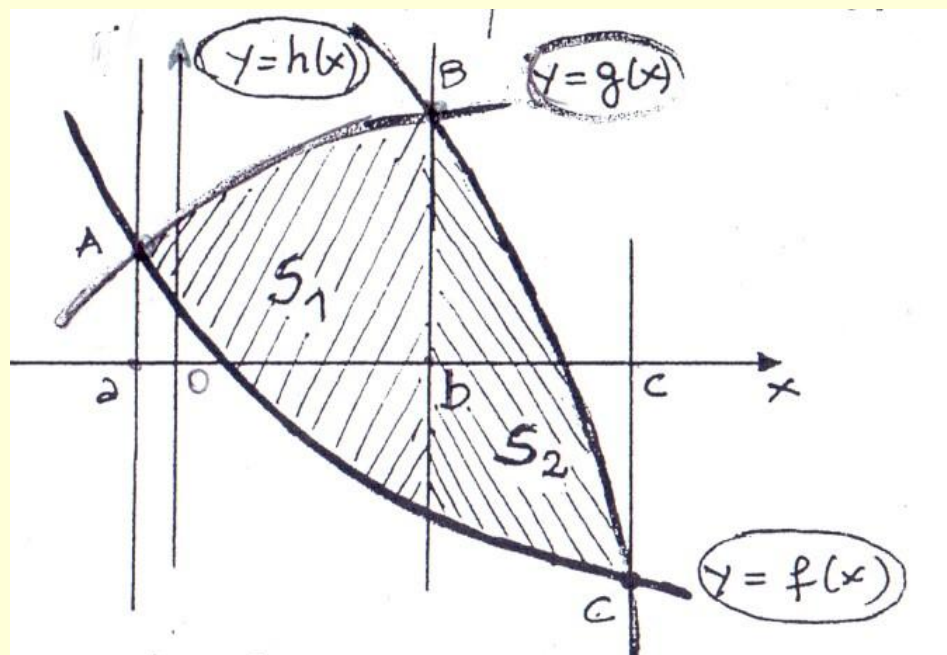
Siano f e g funzioni continue con $f(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, allora l'area A della regione S di piano delimitata dai grafici delle funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e dalle rette $x = a$ e $x = b$, è data da:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Se la regione S di piano è *delimitata dai grafici di più funzioni*, si suddivide opportunamente con rette verticali la regione S , in modo che ciascuna sottoregione sia delimitata dai grafici di due funzioni, così da ricondursi al caso precedente per il calcolo della relativa area.

Esempio

La figura illustra il procedimento.

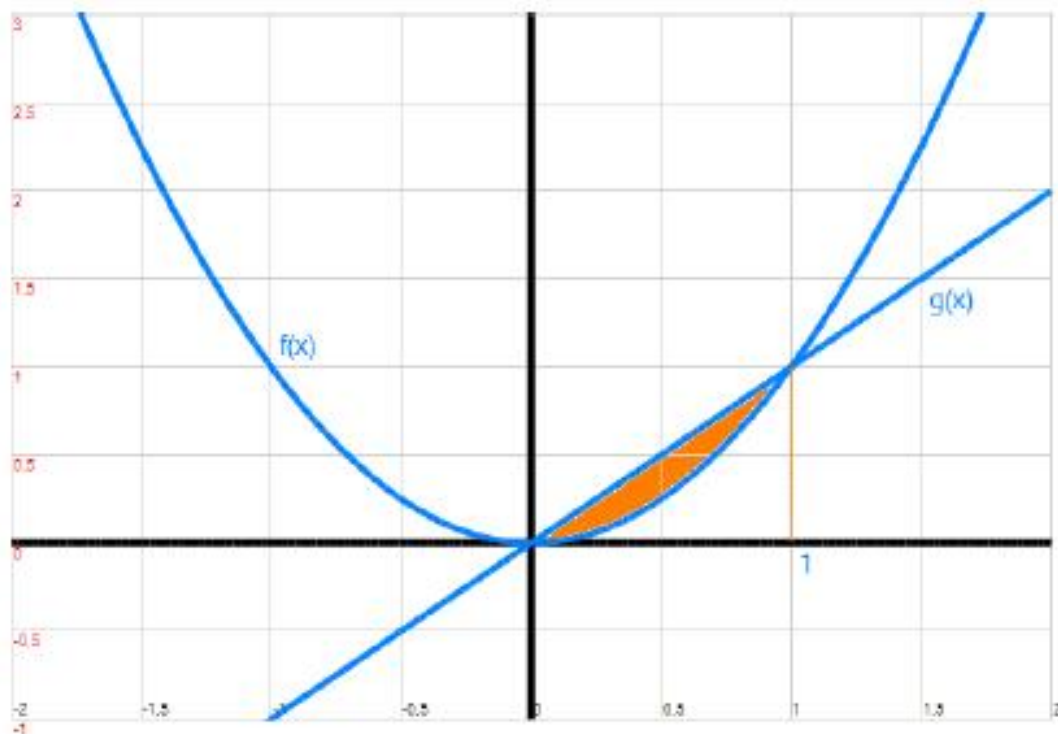


Posto A = area di S , A_1 = area di S_1 e A_2 = area di S_2 si ha:

$$A = A_1 + A_2 = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx + \int_b^c [h(x) - f(x)] dx$$

Esempio 1

Calcolare l'area compresa tra le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x$.
Facendo un disegno abbastanza preciso, possiamo schematizzare così la situazione:

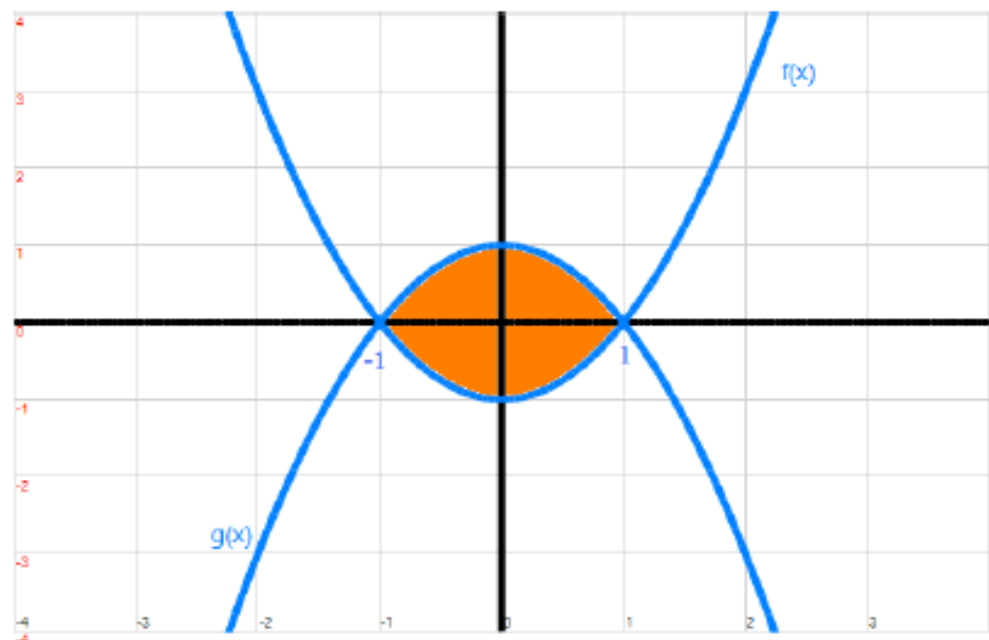


Area compresa tra due curve $f(x)$ e $g(x)$

A questo punto non resta che calcolare:
$$\int_0^1 x - x^2 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Esempio 2

Calcolare l'area compresa tra le funzioni $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = -x^2 + 1$.

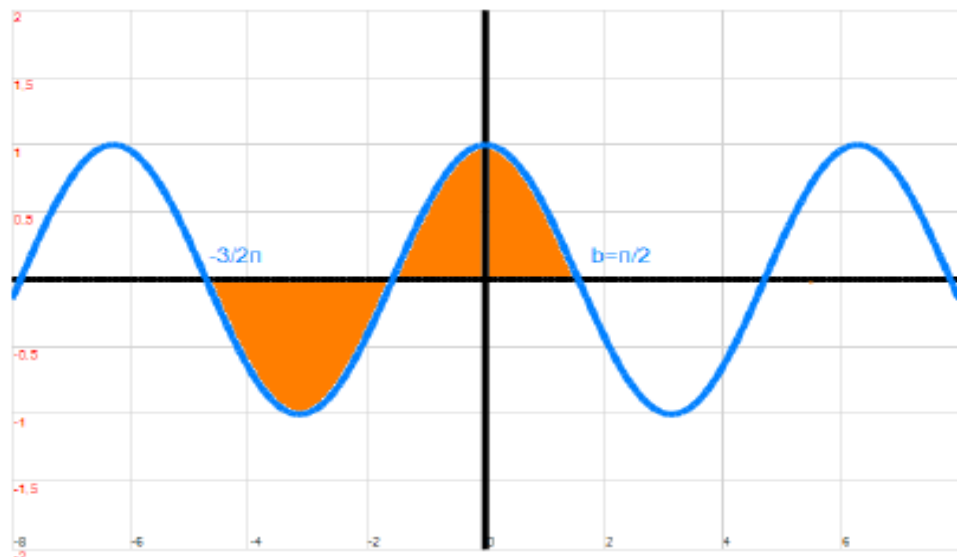


Area compresa tra due curve $f(x)$ e $g(x)$

Non c'è bisogno di fare il sistema per capire che, nell'esercizio in questione, gli estremi di integrazione a e b sono $a = -1$ e $b = 1$. Applicando l'integrale sopra descritto, otteniamo
$$\int_{-1}^1 -x^2 + 1 - (x^2 - 1) dx = \int_{-1}^1 -2x^2 + 2 dx = \left[-2\frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^1 = -2 \cdot \frac{1}{3} + 2 - \left(-2 \cdot \frac{-1}{3} - 2 \right) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Esempio 3

Si consideri la curva $f(x) = \cos x$. Determinare, se esiste, almeno un numero reale $b > -\frac{3}{2}\pi$, per il quale sia $\int_{-\frac{3}{2}\pi}^b f(x) dx = 0$.



Significato geometrico dell'integrale

Si può rispondere a tale quesito sfruttando ancora una volta solo ed esclusivamente la conoscenza delle funzioni elementari. Per quanto riguarda l'interpretazione geometrica dell'integrale sappiamo che un integrale definito vale 0 o quando stiamo integrando la funzione nulla o quando stiamo integrando una funzione in un intervallo nel quale l'area presa in considerazione nella parte positiva della funzione è esattamente uguale a quella negativa. (Vedi figura). Quindi, partendo da $x = \frac{3}{2}\pi$ il primo valore di b che soddisfa tale requisito è $b = \frac{\pi}{2}$.

ESERCIZI

1. Se $w'(t)$ è il tasso di crescita di un bambino in etti all'anno,

cosa rappresenta $\int_5^{10} w'(t) dt$?

2. Una popolazione di 100 api cresce alla velocità di $n'(t)$

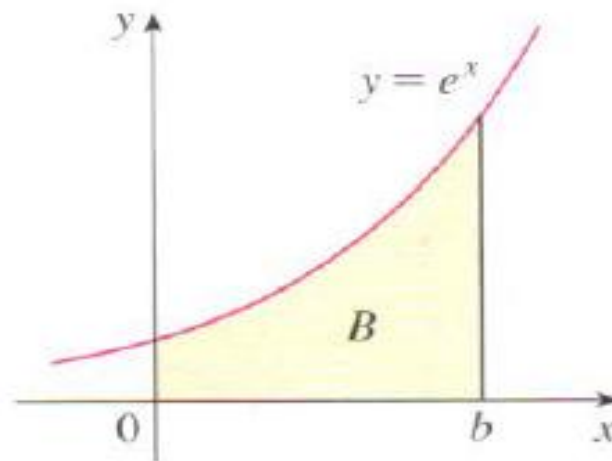
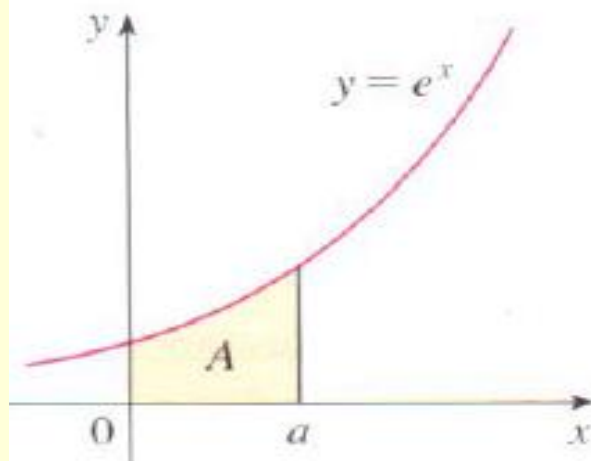
unità a settimana. Cosa rappresenta $100 + \int_0^{15} n'(t) dt$?

3. Trovare l'intervallo in cui la funzione $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2} dt$ ha concavità verso l'alto.

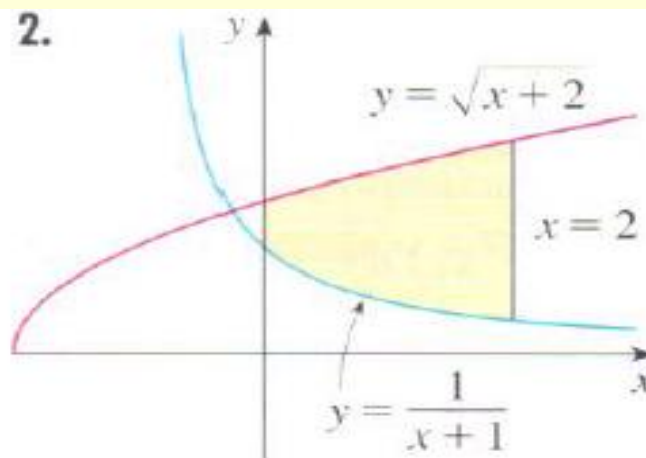
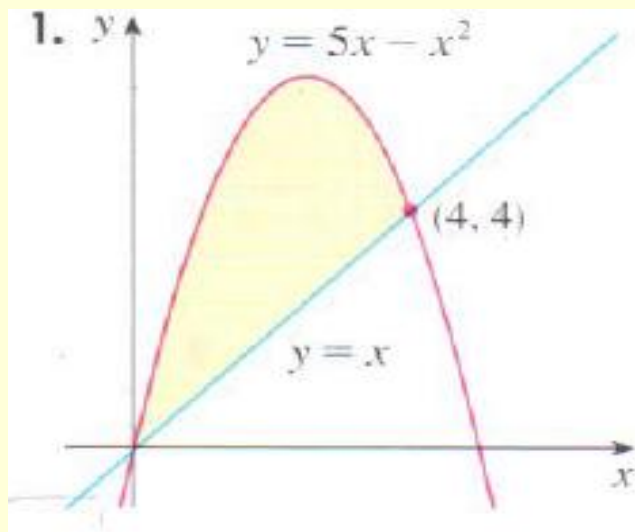
4. Una particella si muove lungo una retta con velocità $v(t) = t^2 + 2t - 3$ (misurata in metri al secondo). Determinare lo spostamento della particella nel periodo di tempo $1 \leq t \leq 3$.

5.

L'area chiamata B è tre volte l'area di A . Esprimere b in termini di a .



6. Calcolare l'area della regione colorata in ciascuna figura



7. Trovare il numero reale a per cui la retta di equazione $x = a$ suddivide la regione individuata dall'asse x e dalla curva $y = x^3 - 1$, nell'intervallo $[1, 3]$, in due parti di uguale area (rappresentare la situazione nel piano cartesiano)
8. Calcolare il seguente integrale definito ed interpretarlo geometricamente dopo aver rappresentato nel piano cartesiano il grafico della funzione integranda:

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1-x}{x^2} dx$$

9. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dall'asse x , dalla curva $y = \ln x$ e dalle rette di equazione $x = 1/e$ ed $x = e$. Rappresentare nel piano cartesiano la regione considerata.
10. Determinare l'area della regione di piano limitata dalla parabola $y = x^2$, dalla tangente alla parabola in $(1,1)$ e dall'asse x . Rappresentare nel piano cartesiano la regione considerata.

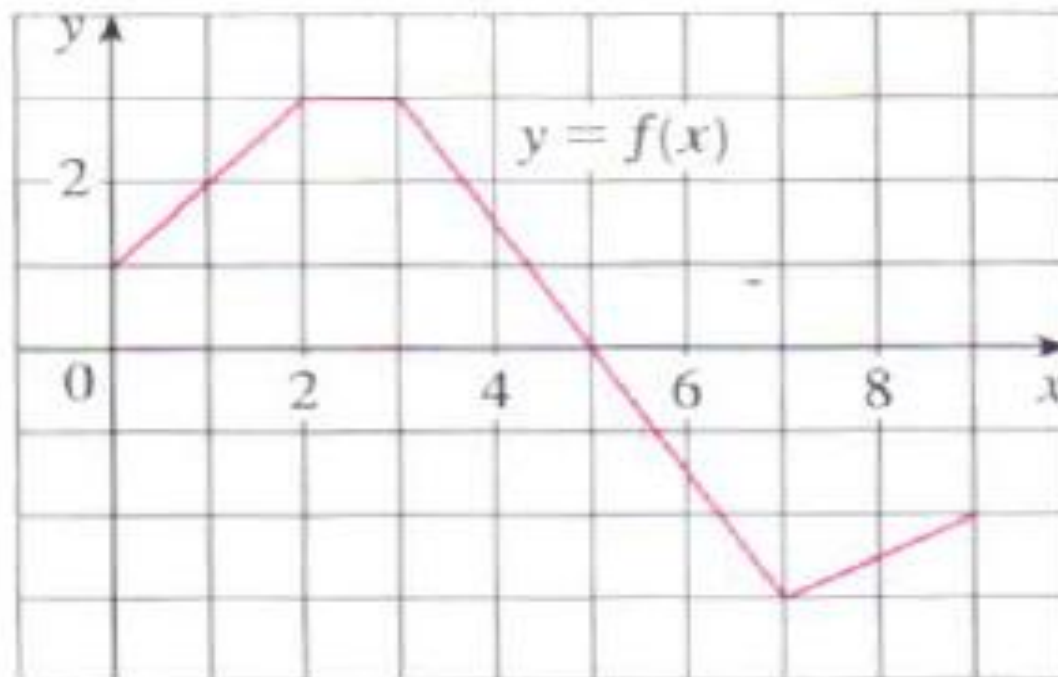
11. Dato il grafico di f , valutare ciascun integrale interpretandolo in termini di aree

(a) $\int_0^2 f(x) dx$

(b) $\int_0^5 f(x) dx$

(c) $\int_5^7 f(x) dx$

(d) $\int_0^9 f(x) dx$

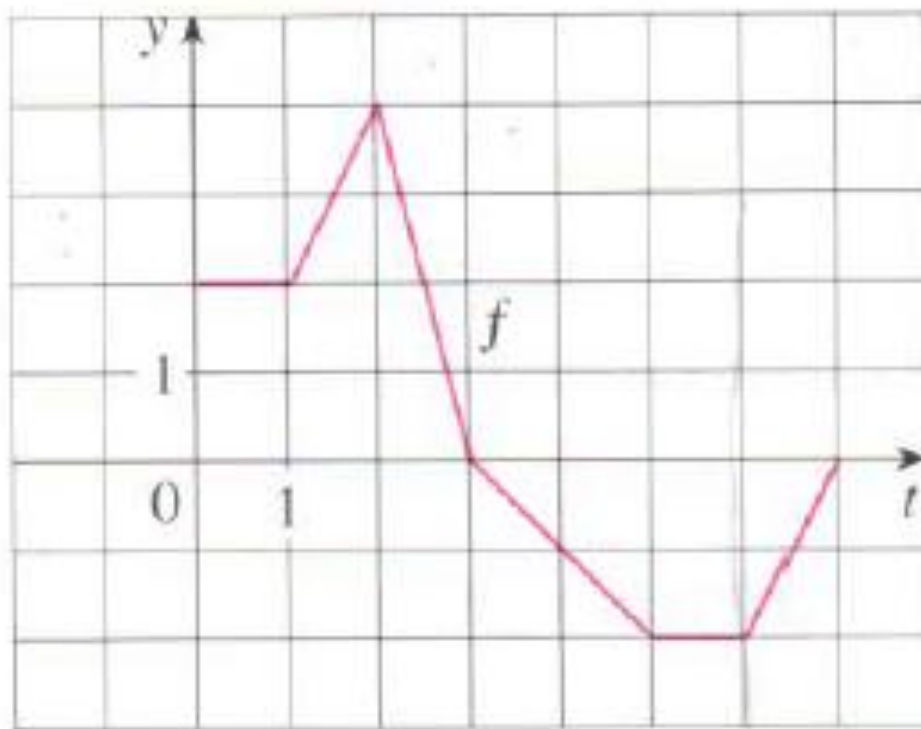


12. Sia $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ dove f è la funzione avente il grafico sotto riportato.

a) Calcolare $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ e $g(6)$.

b) Su quali intervalli g è crescente?

c) Per quale valore di x , g assume il valore massimo?



13. Due auto A e B partono affiancate e da ferme. La figura mostra i grafici delle loro funzioni velocità.

a) Quale delle due auto è in testa dopo un minuto? Spiegare.

b) Qual è il significato dell'area della regione colorata?

