

***ISTITUZIONI DI MATEMATICHE E FONDAMENTI DI
BIOSTATISTICA***

**APPLICAZIONI DEL CONCETTO DI
DERIVATA**

A. A. 2014-2015

L. Doretti

A. Significato geometrico di derivata

1. Dato il grafico di f , utilizzare il significato geometrico di derivata per:

- *determinare il dominio della derivata f'*
- *riconoscere i punti di non derivabilità di f*
- *valutare la derivata di f in un punto, quando esiste*
- *confrontare tra loro le derivate in diversi punti del dominio di f e ordinare tali valori numerici*

2. *Disegnare il grafico di una funzione* che soddisfi condizioni che coinvolgono il concetto di derivata

3. Noto il grafico di f , *disegnare il grafico della derivata f'*

4. Noto il grafico di f' , ricavare *informazioni sul grafico di f*

B. Calcolo della derivata

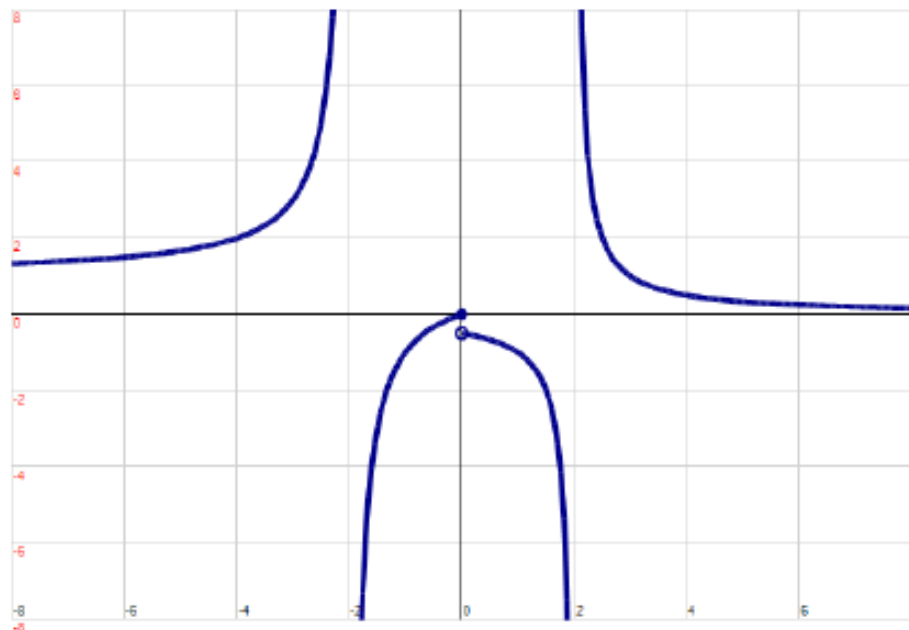
1. Data una funzione f ed un punto x_0 del suo dominio, scrivere il rapporto incrementale della funzione e la derivata in x_0 come limite di tale rapporto
2. Data una funzione f espressa attraverso una formula matematica, determinare la *formula matematica della funzione derivata f'* , usando la tabella delle derivate fondamentali e le regole di derivazione

C. Applicazioni del concetto di derivata

1. Interpretazione, in vari contesti, della derivata in un punto come *rapidità di variazione della funzione in un punto* e del rapporto incrementale come *rapidità di variazione media della funzione in un intervallo*
2. A partire dalla formula che definisce una funzione f , determinare l' *equazione della retta tangente* alla curva, grafico di f , in un suo punto
3. Risoluzione di *semplici problemi di ottimizzazione*
4. *Studio di funzione*: disegnare con buona approssimazione il grafico di una funzione a partire dalla formula matematica che la definisce (*in particolare studio di funzioni che nascono dalla modellizzazione matematica di un certo fenomeno*)

LETTURA DELLE DERIVATE IN GRAFICI DI FUNZIONI

Esempio 1



La funzione f è derivabile in $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$, in quanto dove non è continua (la teoria ci dice che) non può essere derivabile (in quanto se fosse derivabile sarebbe continua!). Oltre i punti di discontinuità dal dominio della derivata prima (a volta indicato con $Dom(f'(x))$) vanno tolti anche i punti angolosi, di cuspidi e i flessi a tangente verticale che qui non troviamo.

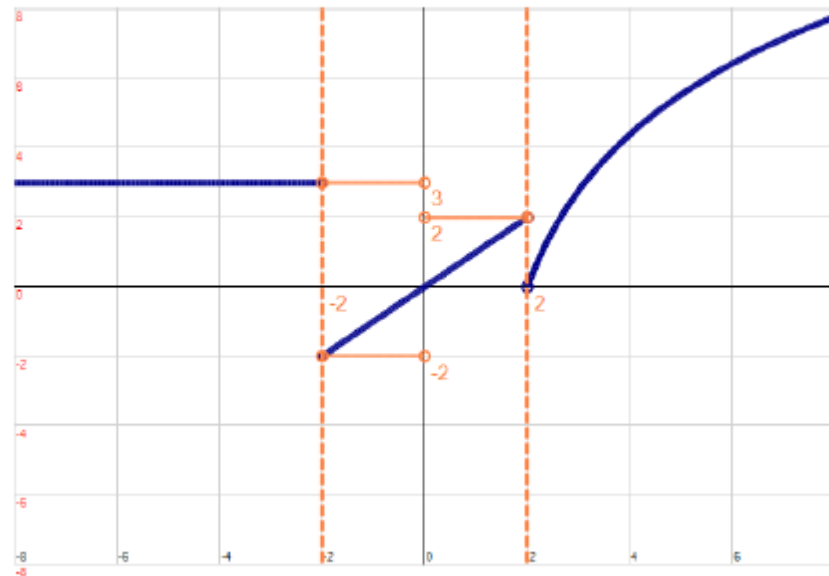
$f'(x) > 0$ in $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$, in quanto la funzione è crescente.

$f'(x) < 0$ in $(0, 2) \cup (2, +\infty)$, in quanto la funzione è decrescente.

$f''(x) > 0$ in $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ in quanto la funzione è convessa (faccina sorridente!)

$f''(x) < 0$ in $(-2, 0) \cup (0, 2)$ in quanto la funzione è concava (faccina triste!).

Esempio 2



$Dom(f'(x)) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty).$

$f'(x) > 0$ in $(-2, 2) \cup (2, +\infty)$, in quanto la funzione è crescente.

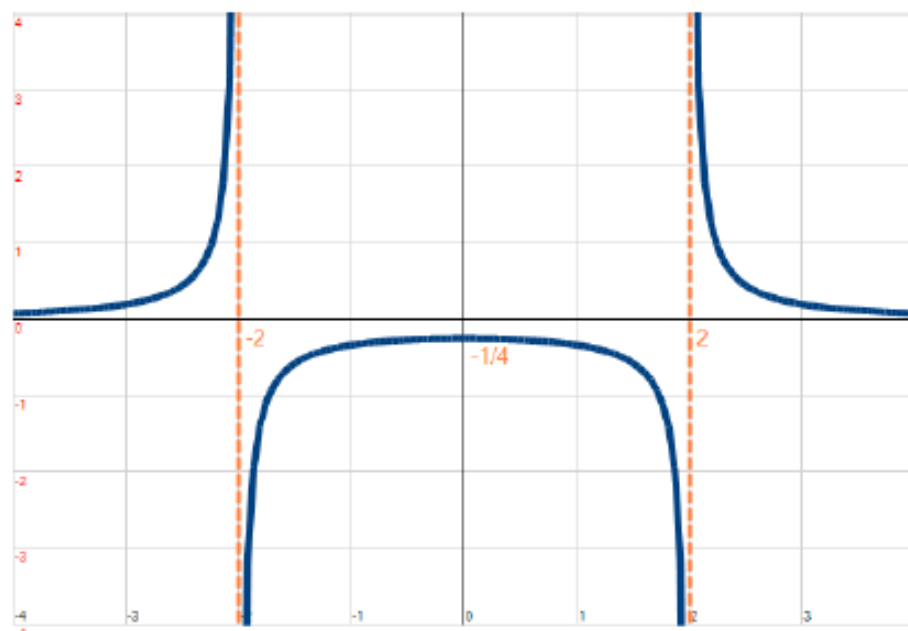
$f'(x) = 0$ in $(-\infty, -2)$, in quanto la funzione è orizzontale (quindi in ogni punto di tale intervallo la tangente è orizzontale, ovvero la derivata prima vale 0).

$f'(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$ in $(-\infty, -2)$ e in $(-2, 2)$, in quanto la funzione cresce in ogni punto di questo intervallo con la stessa pendenza (0 nel primo intervallo, 1 nel secondo). In questo tipo di domande è chiaro che viene richiesto un intervallo e non un singolo punto come invece può succedere rispondendo alla domanda precedente; altrimenti sarebbe una richiesta del tutto simile al dominio della derivata prima.

$f''(x) < 0$ in $(2, +\infty)$ in quanto la funzione è concava.

$f''(x) = 0$ in $(-\infty, -2) \cup (-2, 2)$ in quanto la funzione non è né concava né convessa (ha un andamento rettilineo).

Esempio 3



$$\text{Dom}(f'(x)) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty).$$

$$f'(x) > 0 \text{ in } (-\infty, -2) \cup (-2, 0).$$

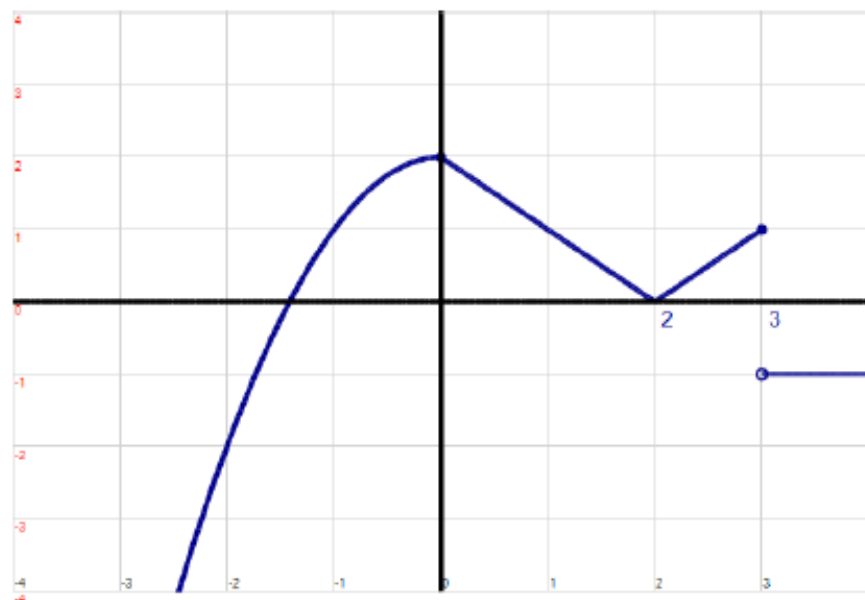
$$f'(x) < 0 \text{ in } (0, 2) \cup (2, +\infty).$$

$f'(x) = 0$ in $x = 0$, in quanto è un punto di massimo relativo nel quale la funzione è derivabile, quindi, per il Teorema di Fermat, la derivata vale 0.

$$f''(x) < 0 \text{ in } (-2, 2).$$

$$f''(x) > 0 \text{ in } (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

Esempio 4



f è continua in $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$. $x = 3$ discontinuità di salto.

$\text{Dom}(f'(x)) = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$ in quanto in $x = 3$ la funzione non è continua e in $x = 0$ e $x = 2$ la funzione presenta un punto angoloso.

$f'(x) < 0$ in $(0, 2)$.

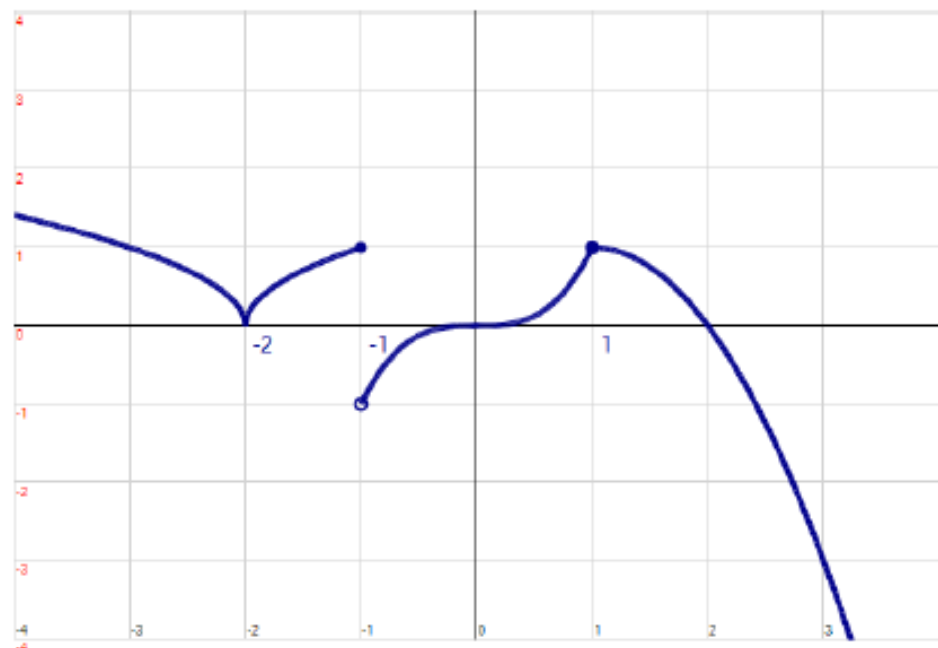
$f'(x) = 0$ in $(3, +\infty)$.

$f'(x) > 0$ in $(-\infty, 0) \cup (2, 3)$.

$f'(x) = k$ in $(0, 2)$, in $(2, 3)$ e in $(3, +\infty)$. Ho separato con virgola, in quanto la costante k non è la stessa in tutti gli intervalli. $f''(x) < 0$ in $(-\infty, 0)$.

$f''(x) = 0$ in $(0, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$.

Esempio 5



$$\text{Dom}(f'(x)) = (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$f'(x) > 0 \text{ in } (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1).$$

$$f'(x) < 0 \text{ in } (-\infty, -2) \cup (1, +\infty).$$

$$f'(x) = 0 \text{ in } x = 0, \text{ in quanto flesso a tangente orizzontale.}$$

$$f''(x) < 0 \text{ in } (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (1, +\infty).$$

$$f''(x) > 0 \text{ in } (0, 1).$$

$$f''(x) = 0 \text{ in } x = 0 \text{ in quanto punto di flesso (non a tangente verticale!)}$$

DAL GRAFICO DI UNA FUNZIONE A QUELLO DELLA SUA DERIVATA

Se il grafico di $f(x)$...	allora il grafico di $f'(x)$...
è crescente	è positivo
è decrescente	è negativo
è convesso	è crescente
è concavo	è decrescente
ha un flesso (non a tg. vert) in x_0	ha un punto di max o di min in x_0
ha un max o un min in x_0	taglia l'asse delle x in x_0
ha un tratto rettilineo di coeff. ang. m	è una retta orizz. del tipo $y = m$
ha un asintoto verticale $x = x_0$	ha un asintoto verticale $x = x_0$
ha un asintoto orizzontale $y = y_0$	ha un asintoto orizzontale $y = 0$
ha un asintoto obliquo $y = mx + q$	ha un asintoto orizzontale $y = m$
ha una cuspide in $x = x_0$	ha un asintoto verticale $x = x_0$
ha un flesso a tangente vert. in $x = x_0$	ha un asintoto verticale $x = x_0$

Esempio 1

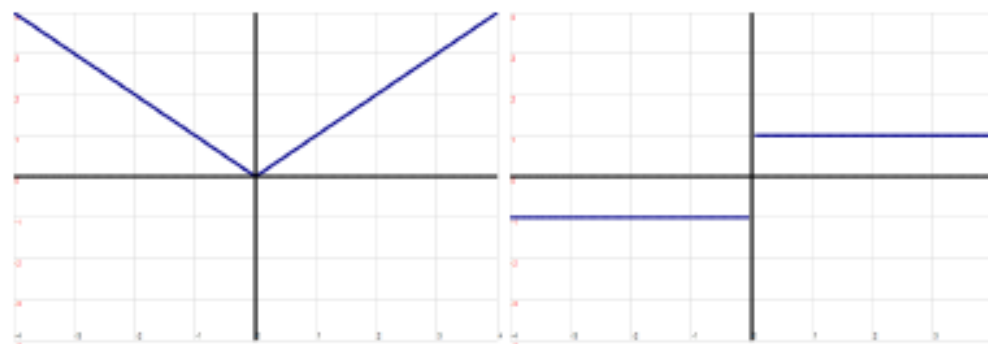


Grafico di $f(x)$

Grafico di $f'(x)$

Esempio 2

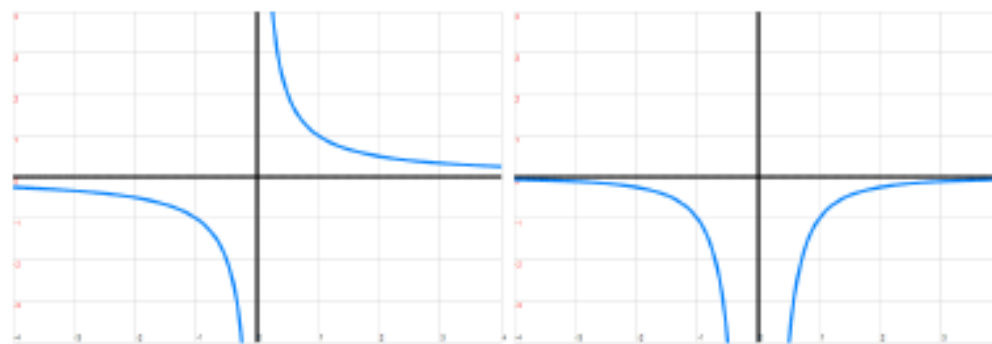


Grafico di $f(x)$

Grafico di $f'(x)$

Esempio 3

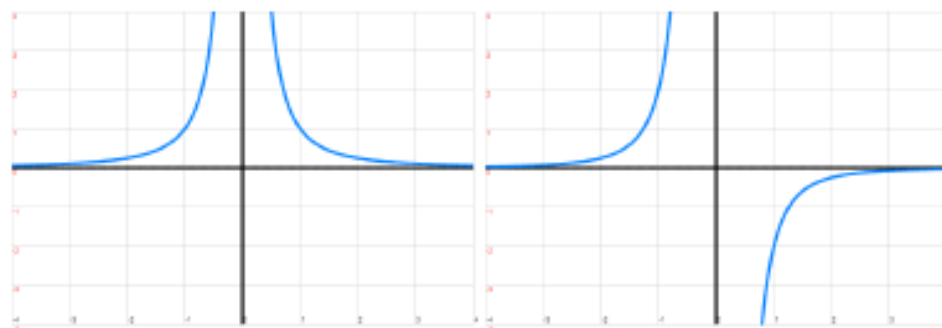


Grafico di $f(x)$

Grafico di $f'(x)$

Esempio 4

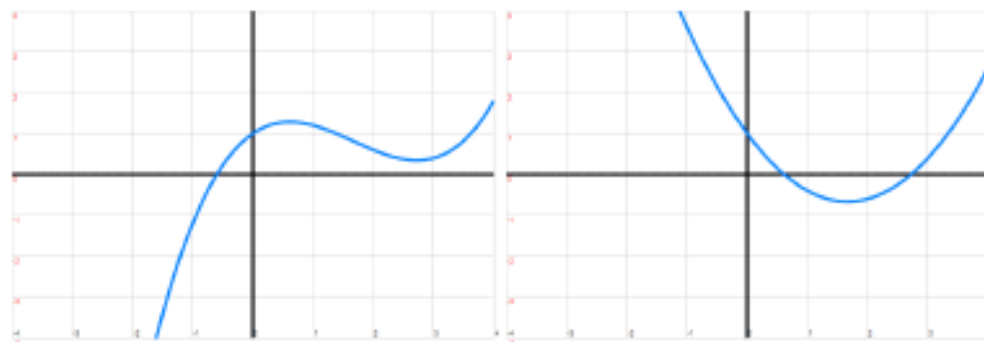


Grafico di $f(x)$

Grafico di $f'(x)$

Esempio 5

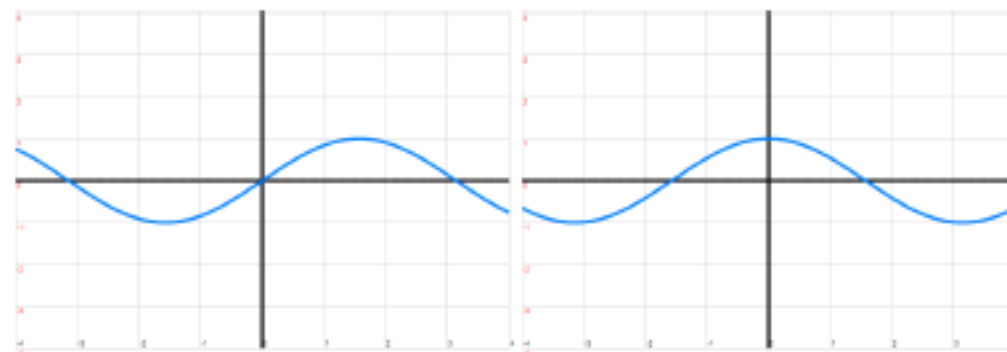


Grafico di $f(x)$

Grafico di $f'(x)$

Esempio 6



Grafico di $f(x)$

Grafico di $f'(x)$

FUNZIONI CHE MODELLIZZANO FENOMENI REALI

Esempio 1.

Ipotesi biologiche sulla crescita di una popolazione di batteri suggeriscono che il numero $N(t)$ di individui nella popolazione al tempo t segua un andamento dato dalla seguente legge:

$$N(t) = \frac{2e^t}{t+1}$$

Studiare la funzione N (anche per $t < 0$) e disegnarne il grafico

Esempio 2.

Una popolazione di laboratorio di *Drosophila* varia nel tempo, misurato in giorni, secondo la seguente legge:

$$N(t) = \frac{3000}{1 + e^{-2t}}$$

Studiare la funzione e disegnarne il grafico in modo approssimato.

In particolare rispondere alle seguenti richieste:

a) calcolare la numerosità iniziale (cioè per $t=0$) della popolazione e mostrare che la funzione N è crescente;

b) determinare $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$

c) è possibile che la numerosità della popolazione diventi tre volte quella iniziale? Perché?

DETERMINAZIONE DELLA RETTA TANGENTE

Equazione della tangente a una curva nel punto x_0

Definizione 2 *Data una funzione di variabile reale f , consideriamo un punto $(x_0, f(x_0))$ del suo grafico. Se f è derivabile in x_0 la retta tangente al grafico della f in (x_0, y_0) è la retta che passa per tale punto con coefficiente angolare $f'(x_0)$. Ovvero è la retta di equazione $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.*

Esempio 1

Trovare l'equazione della tangente alla parabola $f(x) = x^2 - 2x$ nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

Applicando la formula precedente, l'equazione sarà: $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$. A questo punto ci manca soltanto da calcolare $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$ e $f'(1)$. Per calcolare questo valore, dobbiamo prima calcolare la derivata della funzione $f'(x)$ che è $f'(x) = 2x - 2$, quindi $f'(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$. L'equazione della tangente è $y - (-1) = 0(x - 1)$, ovvero $y = -1$. La tangente è una retta orizzontale, quindi vuol dire che il punto era *stazionario*.

Esempio 2

Trovare, se esiste, un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, nel quale la funzione $f(x) = e^x + x$ abbia tangente parallela alla bisettrice del primo e del terzo quadrante.

Per rispondere a questa domanda ci dobbiamo ricordare che il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in un punto x_0 è proprio il valore $f'(x_0)$ e che due rette sono parallele quando hanno lo stesso coefficiente angolare. Da questo segue, che ci dobbiamo chiedere se esiste un x che soddisfa l'equazione $f'(x) = 1$. Poiché $f'(x) = e^x + 1$, l'equazione da soddisfare diventa $e^x + 1 = 1$ (essendo 1 il coefficiente angolare della bisettrice in questione). Si vede subito (ricordatevi i grafici delle funzioni elementari!) che l'equazione $e^x = 0$ non ha soluzioni. Quindi il punto in questione non esiste.

Esempio 3

Sia $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$. Dire se esiste un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ nel quale la tangente è perpendicolare alla bisettrice del primo e del terzo quadrante. In caso affermativo trovare l'equazione di tale tangente.

Due rette sono perpendicolari quando il prodotto dei loro coefficienti angolari vale -1 . Poiché il coefficiente angolare della bisettrice *I-III* quadrante vale 1 , allora, il coefficiente angolare di una retta perpendicolare alla bisettrice deve valere -1 . Come nell'esercizio precedente, il problema si sposta sulla risolubilità dell'equazione $f'(x) = -1$, che, facendo semplici calcoli, diventa $x^2 - 1 = -1$, soddisfatta per $x = 0$. Quindi il punto esiste. Per calcolare l'equazione della tangente applichiamo la formula e otteniamo $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, ovvero $y - 0 = -1(x)$, cioè $y = -x$, che è la bisettrice del secondo e del quarto quadrante.

ESERCIZI

1. La funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = 10x^5 - x$ è crescente? Giustificare la risposta.
2. Trascurando l'attrito dell'aria, la distanza d percorsa da un corpo lasciato cadere al tempo $t=0$ è legata al tempo t di caduta dalla formula $d(t) = \frac{1}{2}gt^2$ dove g è l'accelerazione di gravità. Calcolare:
 - i) la velocità media di caduta tra $t_0 = 2$ s e $t_1 = 6$ s;
 - ii) la velocità media di caduta tra $t_0 = 2$ s e $t_1 = 1$ s;
 - iii) la velocità istantanea di caduta a $t_0 = 2$ s, trovata come limite del rapporto incrementale.

3. Studiare la crescita e decrescenza e trovare gli eventuali punti di massimo e minimo locali delle seguenti funzioni:

$$f(x) = x^2 + 125x^{-1}$$

$$g(x) = x^2 \log(x^2)$$

4. La percentuale p di mortalità dei batteri di una colonia a seconda della concentrazione c dell'antibiotico somministrato è espressa dalla seguente funzione:

$$p(c) = \frac{100}{1 + 20.1 e^{-0.2c}}$$

Determinare a quale concentrazione l'antibiotico è più efficace (cioè p' è massima).

5. Data la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$, determinare, in funzione di x , l'espressione della pendenza della tangente alla curva nel generico punto di ascissa x . Per quale valore di x è minimo il valore di tale pendenza?

6. Sia $f(x) = (3-x) \log x$. Determinare:

$$f(3+h)-f(3)$$

$$3[f(2)]^2$$

Calcolare la derivata prima e seconda della funzione f e poi determinare $f'(1)$ e $f''(2)$.

7. **a)** Disegnare il grafico di una funzione g , continua per ogni x reale, che soddisfi alle seguenti condizioni:

$$g(2) = 4, g'(2) = 0, g'(x) < 0 \text{ per } x < 2 \text{ e per } x > 2.$$

b) Disegnare il grafico di una funzione h , continua per ogni x reale, che soddisfi alle seguenti condizioni:

$$h(2) = 4 \text{ e } h'(x) = 3, \text{ per ogni } x \text{ reale}$$