

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE E FONDAMENTI DI BIOSTATISTICA

9. CALCOLO INTEGRALE: L'INTEGRALE INDEFINITO

A. A. 2014-2015

L. Doretti

La nascita e lo sviluppo del *calcolo integrale* sono legati a due tipi di problemi:

- La *ricerca delle primitive, o antiderivate, di una funzione data*, cioè di quelle funzioni di cui è nota la derivata (concetto di *integrale indefinito*)
- La *determinazione dell'area di una regione di piano a contorno curvilineo* (concetto di *integrale definito*)

- Oggi sappiamo che le idee su cui si basa la teoria dell'integrazione furono formulate 2500 anni fa dagli antichi matematici greci **Eudosso** ed **Archimede** e riprese poi nel Rinascimento da **Galilei** e dai suoi allievi **Cavalieri** e **Torricelli**
- Nel XVII secolo, **Barrow**, insegnante di Newton a Cambridge, fu il primo a riconoscere le relazioni tra derivazione ed integrazione
- **Newton** e **Leibniz** seppero utilizzare per primi queste relazioni e trasformare il calcolo in un metodo matematico

***Solitamente si riconosce in Newton e Leibniz gli
inventori del calcolo***

IL PROBLEMA DELLE PRIMITIVE

Ci sono situazioni in cui si presenta il problema di *trovare una funzione* di cui *si conosce la derivata*

Esempi di questo tipo sono i seguenti:

- un fisico conosce *la velocità con cui un oggetto si muove* e potrebbe essere interessato a conoscere *la sua posizione* in un dato istante, cioè la *legge del moto* $s = s(t)$
- un ingegnere conosce *la velocità variabile alla quale l'acqua fuoriesce da una cisterna* e vuole sapere *quanta acqua è uscita* dopo un certo periodo di tempo
- un biologo conosce *la velocità di crescita di una popolazione di batteri* e potrebbe volerne dedurre *la grandezza della popolazione* in un certo istante futuro

PRIMITIVA (O ANTIDERIVATA) di una funzione

Definizione

Sia f una funzione definita in un intervallo I . Una funzione F è detta una **primitiva** (o **antiderivata**) **di f** se per ogni $x \in I$, F è derivabile e si ha:

$$F'(x) = f(x)$$

Esempi

1. Sia $f(x) = x^2$, allora $F(x) = x^3/3$ è una **primitiva di f** (ma lo sono anche le funzioni $G(x) = x^3/3 + c$, al variare di c in $\mathbb{R}$)
2. Sia $f(x) = e^x$, allora $F(x) = e^x$ è una **primitiva di f** (ma lo sono anche le funzioni $G(x) = e^x + c$, al variare di c in $\mathbb{R}$)
3. Sia $f(x) = \cos x$, allora $F(x) = \sin x$ è una **primitiva di f** (ma lo sono anche le funzioni $G(x) = \sin x + c$, al variare di c in $\mathbb{R}$)

Dagli esempi precedenti si deduce che se una funzione ammette una primitiva, allora ne ha infinite. Il seguente teorema le caratterizza tutte.

TEOREMA

Sia F una primitiva della funzione f sull'intervallo I . Allora l'insieme delle primitive di f è dato da:

$$\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Dim.

E' chiaro che ogni funzione $y = F(x) + c$ è una primitiva di f poiché $y' = F'(x) = f(x)$.

D'altra parte, se G è una qualunque primitiva di f diversa da F , si ha: $G'(x) = F'(x) = f(x)$, quindi $G'(x) - F'(x) = 0$, ovvero $(G - F)'(x) = 0$. Poiché una funzione con derivata nulla in tutto un intervallo, è costante (segue dal Teorema di Lagrange), si ha che $G - F = c$, con $c \in \mathbb{R}$, quindi $G = F + c$.

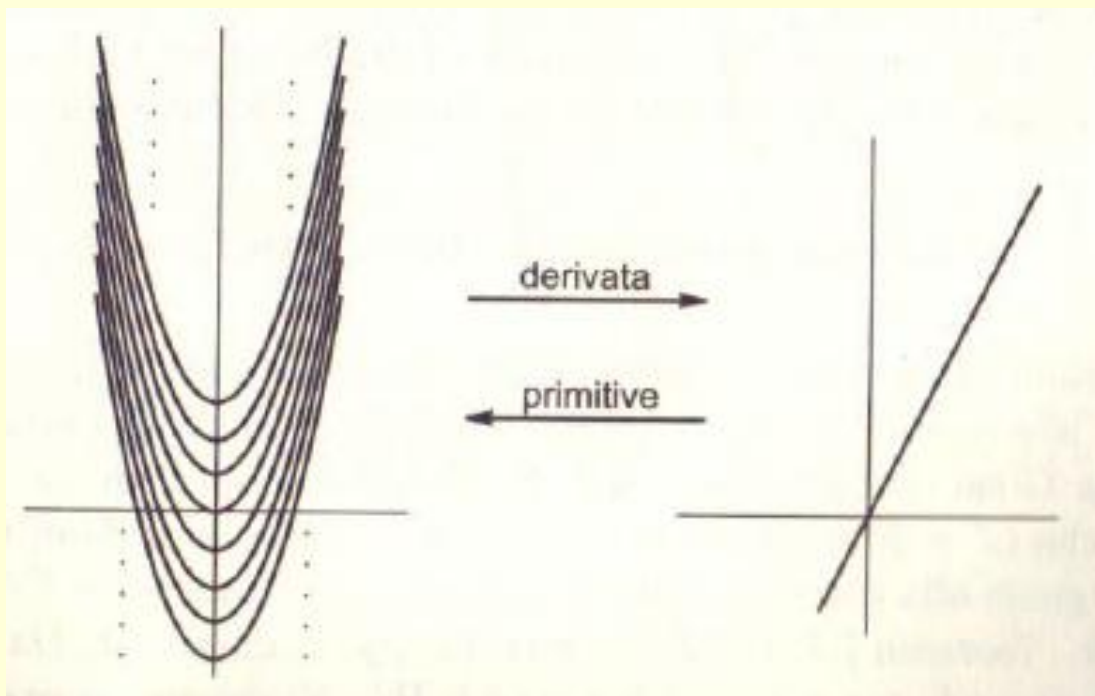
INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

Il teorema precedente viene solitamente espresso in questo modo:

tutte le primitive di una funzione differiscono tra loro per una costante, quindi i loro grafici sono traslati verticalmente uno rispetto all'altro

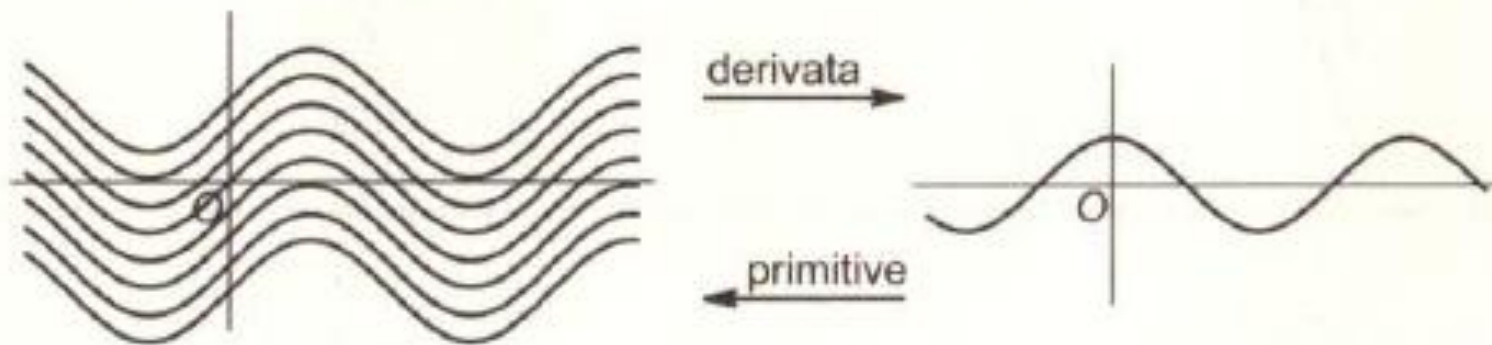
Tale risultato è intuitivo se si pensa al *significato geometrico* di derivata:

due funzioni che hanno stessa derivata hanno in ogni punto del loro grafico tangente con uguale pendenza, e questo può capitare solo se il grafico dell'una è ottenuto da una traslazione verticale del grafico dell'altra



$$f(x) = 2x$$

$$f(x) = \cos x$$



QUALI FUNZIONI HANNO PRIMITIVE?

Il teorema fondamentale del calcolo (che discuteremo più avanti) afferma che:

“ogni funzione continua in un intervallo $[a, b]$ ha in tale intervallo funzioni primitive”

E' così assicurata l'esistenza di primitive per una classe molto vasta di funzioni!

Definizione

Si definisce **integrale indefinito di f** e si indica con il simbolo

$$\int f(x)dx$$

l'insieme delle primitive della funzione f .

Dal teorema che caratterizza l'insieme delle primitive segue che

$$\int f(x)dx = \{F + c / c \in \mathbb{R}\}$$

dove F è una qualunque primitiva di f .

Solitamente si usa la seguente scrittura abbreviata che, nonostante sia formalmente scorretta, è molto più pratica:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Nota

- Nel simbolo di integrale indefinito, $f(x)$ è la **funzione integranda**, dx è solo un simbolo (si può anche omettere) ed indica la variabile indipendente della funzione.
- In questo contesto, l'espressione **integrare una funzione** significa determinare il suo integrale indefinito (e ciò equivale a trovare una primitiva della funzione stessa).

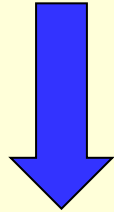
L'integrazione è quindi il procedimento inverso rispetto alla derivazione. In simboli, si ha:

$$D \int f(x) dx = f(x) \quad \text{e} \quad \int Df(x) dx = f(x) + c$$

(la prima scrittura non è formalmente corretta poiché si applica il simbolo di derivazione ad un insieme di funzioni e non ad una singola funzione. Il fatto però che tutte le primitive di f abbiano la stessa derivata rende non ambigua la scrittura e quindi ammissibile)

INTEGRALI IMMEDIATI

Il calcolo dell'integrale indefinito di una funzione f non presenta difficoltà quando *si riconosce nella funzione integranda la derivata di una funzione*



*In particolare, utilizzando la tabella delle derivate delle funzioni elementari (in cui si invertono le due colonne e si compie eventualmente qualche semplice passaggio algebrico) si ottiene facilmente una tabella di integrali indefiniti di certe funzioni, detta **tabella degli integrali immediati***

Tabella degli integrali immediati

$$1. \quad \int k \, dx = kx + c;$$

$$2. \quad \int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1;$$

$$3. \quad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln(|x|) + c;$$

$$4. \quad \int e^x \, dx = e^x + c;$$

$$5. \quad \int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c;$$

$$6. \quad \int \cos x \, dx = \sin x + c;$$

$$7. \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + c;$$

$$8. \quad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c;$$

$$8' \quad \int -\frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \cot x + c;$$

$$9. \quad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c;$$

$$10. \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c;$$

METODI DI INTEGRAZIONE

- In generale non si riesce a trovare facilmente una primitiva della funzione integranda.
- In questi casi possono rivelarsi utili alcune procedure dette **metodi di integrazione**
- Tali procedure traggono la loro origine dalle proprietà delle derivate (sono dimostrate utilizzando tali proprietà) e spesso consentono di determinare l'integrale indefinito di una funzione riconducendolo al calcolo di uno o più integrali immediati

Nota

L'integrazione di una funzione non è un'operazione meccanica come quella di derivazione.

Resta invece meccanica l'operazione di verifica del risultato dell'integrazione: *basta derivare la generica funzione ottenuta e controllare che coincida con la funzione integranda!*

INTEGRAZIONE PER DECOMPOSIZIONE

Proposizione 1 *Siano f, g due funzioni integrabili e c un numero reale. Allora anche $f + g$ e cf sono funzioni integrabili e risulta:*

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx,$$
$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx.$$

Più in generale si ha:

Se una funzione f è decomponibile nella forma:

$$f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$$

allora si ha:

$$\int f(x) dx = \int c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) dx = c_1 \int f_1(x) dx + \dots + c_n \int f_n(x) dx$$

Il metodo di integrazione per decomposizione si ottiene dalla regole di derivazione della somma e da quella del prodotto di una costante per una funzione

Esempio 1

Calcolare l'integrale $\int e^x + 2 \cos x \, dx = \int e^x \, dx + 2 \int \cos x \, dx = e^x + 2 \sin x + c$

Esempio 2

Calcolare l'integrale $\int x^2 + \sqrt{x} \, dx = \int x^2 \, dx + 2 \int \sqrt{x} \, dx = \frac{x^3}{3} + \int x^{\frac{1}{2}} \, dx =$
 $= \frac{x^3}{3} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$

Esempio 3

Calcolare l'integrale $\int \frac{1+x+x^2}{x^3} \, dx = \int \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \, dx = \int \frac{1}{x^3} \, dx + \int \frac{1}{x^2} \, dx +$
 $+ \int \frac{1}{x} \, dx = \int x^{-3} \, dx + \int x^{-2} \, dx + \int \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^{-1}}{-1} + \ln |x| + c =$
 $= -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \ln |x| + c$

INTEGRAZIONE PER PARTI

Se f e g sono funzioni derivabili in un intervallo I con derivate f' e g' continue in I , allora si ha:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

- Tale metodo può essere applicato per calcolare l'integrale indefinito del prodotto di due funzioni quando si riconosce in una di esse la derivata di un'altra funzione

Il metodo di integrazione per parti si ottiene dalla regola di derivazione del prodotto di due funzioni

Esempio 4

Calcolare $\int xe^x dx$

Si pone $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$. Quindi $g(x) = \int e^x dx = e^x$
e $f'(x) = 1$.

Segue che $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

Esempio 5

Calcolare $\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx$

Si pone $f(x) = \ln x$ e $g'(x) = 1$. Quindi $g(x) = \int 1 dx = x$ e $f'(x) = \frac{1}{x}$

Si ha allora: $\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c$

Esempio 6

Calcolare $\int x \sin x dx$

Si pone $f(x) = x$ e $g'(x) = \sin x$. Quindi $g(x) = \int \sin x dx = -\cos x$ e $f'(x) = 1$.

Quindi $\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

Sia f una funzione continua. Posto $x = g(t)$, con g funzione invertibile con derivata g' continua, si ha:

$$\int f(x)dx = \left[\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt \right]_{t=g^{-1}(x)}$$

- In pratica occorre “far sparire” formalmente la x dove compare a sinistra dell’uguaglianza e ciò si ottiene con le “sostituzioni” seguenti:

$$\begin{cases} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \end{cases}$$

- In tal modo di passa si passa da $\int f(x)dx$

a $\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt$

che è l’integrale a cui ci si deve ricondurre con la regola di integrazione enunciata.

Esempio 7

Calcolare $\int \frac{x}{x-1} dx$

Si usa la sostituzione $x = t + 1$, $dx = dt$, $t = x - 1$ e si ottiene:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x-1} dx &= \int \frac{t+1}{t} dt = \int \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = \int 1 dt + \int \frac{1}{t} dt = t + \ln|t| + c = \\ &= x - 1 + \ln|x - 1| + c = x + \ln|x - 1| + c'\end{aligned}$$

Esempio 8

Calcolare $\int x\sqrt{x+1} dx$

Si usa la sostituzione $x = t - 1$, $dx = dt$, $t = x + 1$ e si ottiene:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1} dx &= \int (t-1)\sqrt{t-1+1} dt = \int (t-1)\sqrt{t} dt = \\ &= \int (\sqrt{t^3} - \sqrt{t}) dt = \int (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) dt = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{5}(\sqrt{x+1})^5 - \frac{2}{3}(\sqrt{x+1})^3 + c\end{aligned}$$

In alcuni casi può convenire sostituire una “*parte*” della funzione integranda con una *nuova variabile*.

Si opera cioè la sostituzione di una certa componente $g(x)$ di $f(x)$ con t (e si sostituisce $g'(x) dx$ con dt).

Si passa allora da:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx \quad \text{a} \quad \int f(t) dt$$

purché ovviamente la funzione integranda in x abbia la forma $f(g(x)) \cdot g'(x)$ che consente di eliminare la x con la sostituzione $g(x) = t$.

Il metodo di integrazione per sostituzione si ottiene dalla regola di derivazione della funzione composta

Dalla tabella degli integrali immediati, si ottiene la seguente tabella nella quale:

è sufficiente porre

$$t = f(x)$$

$$dt = f'(x) dx$$

ed applicare il

metodo di

sostituzione

$$\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + c$$

$$\int f'(x) \cdot \sin f(x) dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int f'(x) \cdot \cos f(x) dx = \sin f(x) + c$$

$$\int f'(x) \cdot \frac{1}{\cos^2 f(x)} dx = \operatorname{tg} f(x) + c$$

$$\int f'(x) \cdot \frac{1}{\sin^2 f(x)} dx = -\cotg f(x) + c$$

$$\int f'(x) \cdot a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c \quad (a > 0)$$

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}} dx = \arcsen f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx = \arctg f(x) + c$$

Esempio 9

Calcolare l'integrale $\int \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx$

Poniamo $t = 2 + \sin x$ e quindi $dt = \cos x dx$

$$\begin{aligned} \text{Quindi } \int \frac{\cos x}{2 + \sin x} dx &= \int \frac{1}{2 + \sin x} \cdot \cos x dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c = \\ &= \ln |2 + \sin x| + c = \ln (2 + \sin x) + c \end{aligned}$$

Esempio 10

Calcolare l'integrale $\int \frac{x}{1 + x^2} dx$

Poniamo $t = 1 + x^2$ e quindi $dt = 2x dx$

Questa volta non troviamo le cose già sistemate come nell'esempio precedente e dobbiamo metterle a posto, prima di sostituire:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1 + x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + c = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + c = \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) + c \end{aligned}$$

Esercizio 1 - Calcolare i seguenti integrali indefiniti

1. $\int (ax^3 - 2ax + 2) dx$ dove $a \in \mathbb{R}$

2. $\int \sin(2t) dt$

3. $\int (2^{-2s} + e^{-\mu s}) ds$ dove $\mu \in \mathbb{R}$

4. $\int t\sqrt{1+t} dt$

5. $\int e^{-x}x dx$

6. $\int \operatorname{tg} x dx$

7. $\int (x \ln x)^{-1} dx$

8. $\int (2x - 3)^4 dx$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{t-3}} dt$

10. $\int \operatorname{tg}(2x) dx$

11. $\int \frac{e^s}{1 + e^{2s}} ds$

12. $\int e^x \sqrt{1 + e^x} dx$

13. $\int t^2 \cos(1 - t^3) dt$

14. $\int (2 - x)^6 dx$

15. $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

16. $\int \frac{e^x + 1}{e^x} dx$

17. $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

18. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Esercizio 2

Per ciascuna integrazione effettuata nell'Esercizio 1, verificarne la correttezza, calcolando la derivata della generica primitiva ottenuta

Esercizio 3

Data la funzione $f(x) = \frac{1 + x + x^2}{x^2}$

determinare la primitiva F di f che soddisfa alla condizione $F(1) = 2$ (ovvero che passa per il punto $P(1, 2)$ del piano).