

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE E FONDAMENTI DI BIOSTATISTICA

4. Funzioni elementari

A. A. 2014-2015

L.Doretti

Funzioni elementari

Sono dette **elementari** un insieme di funzioni dalle quali si ottengono, mediante **composizione ed operazioni algebriche**, le funzioni reali più comunemente usate in matematica

Fanno parte di tali funzioni quelle già incontrate nello studio della geometria analitica e della trigonometria

SONO NOTI I GRAFICI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Funzioni elementari: algebriche e trascendenti

- **Funzioni lineari:** $y=mx+q$
- **Funzioni quadratiche:** $y=ax^2+bx+c$
- **Funzioni potenza (e radici):** $y=x^\alpha$

Algebriche

- **Funzioni esponenziali:** $y = a^x$
- **Funzioni logaritmiche:** $y = \log_a x$
- **Funzioni trigonometriche:**
 $y=\text{sen}x, y = \text{cos}x, y = \text{tg}x; y=\text{cotg}x$
- **Funzioni trigonometriche inverse:**
 $y=\text{arcsen}x; y = \text{arccos}x; y = \text{arctg}x; y=\text{arccotg}x$

Trascendenti

Funzioni elementari

L'**importanza** delle *funzioni elementari* è anche dovuta al fatto che:

- Sono i primi riferimenti nella costruzione di **modelli matematici** che descrivono le relazioni dinamiche intercorrenti tra due variabili relative ad un fenomeno che si sta analizzando
- a partire dai loro grafici si **possono tracciare grafici di funzioni più complicate** senza ricorrere a strumenti complessi (come avviene tradizionalmente nello “studio di funzione”)

FUNZIONI LINEARI

- Sono il tipo più semplice di funzione reale di variabile reale
- Le lineari sono tutte e sole le funzioni

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da $f(x) = m \cdot x + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$

(per $m=0$ si hanno le funzioni costanti)

- E' noto dalla geometria analitica che il grafico di tali funzioni è sempre una **retta non parallela all'asse Y**
(per $m=0$, le rette sono parallele all'asse X)

Le rette parallele all'asse Y non sono grafici di funzioni!

*In una funzione lineare $f(x) = m \cdot x + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$
cosa rappresentano m e q ?*

Funzioni lineari: significato di q

sul grafico:

q rappresenta il punto di intersezione della retta con l'asse delle Y, detto anche ***intercetta delle ordinate***

per la funzione:

q = $f(0)$ è il valore della funzione in $x=0$

Domanda: cosa rappresenta invece per la funzione il punto di incontro, x_0 , del suo grafico con l'asse delle X?

x_0 è il punto in cui si annulla la funzione
(ovvero $f(x_0) = 0$)

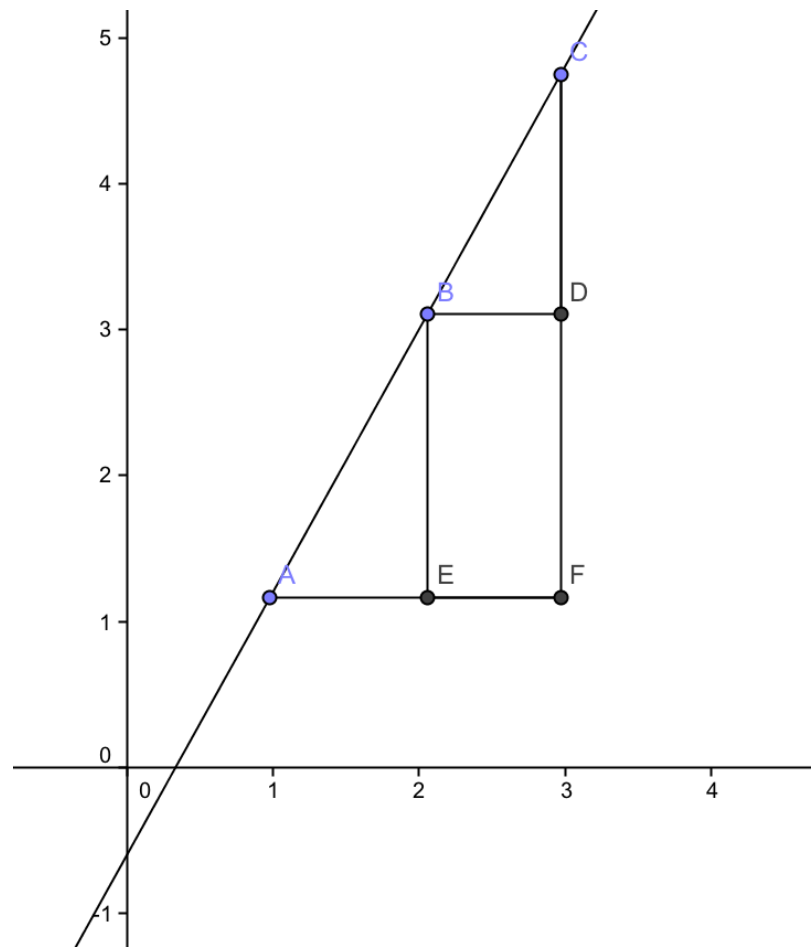
Funzioni lineari: significato di m

- **m** ha un **significato geometrico**:
quantifica **l'inclinazione della retta** (o **pendenza della retta**) rispetto all'asse delle X

• m è ottenuto come rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di *due punti qualunque* del grafico

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

• m è anche uguale alla tangente dell'angolo α che l'asse X forma con la retta con una rotazione in senso antiorario (per tale motivo m è anche detto **coefficiente angolare** della retta)



Dalla geometria analitica si ricorda che:

- Condizioni di **parallelismo** tra due rette di equazioni $y = m_1 \cdot x + q_1$ e $y = m_2 \cdot x + q_2$:

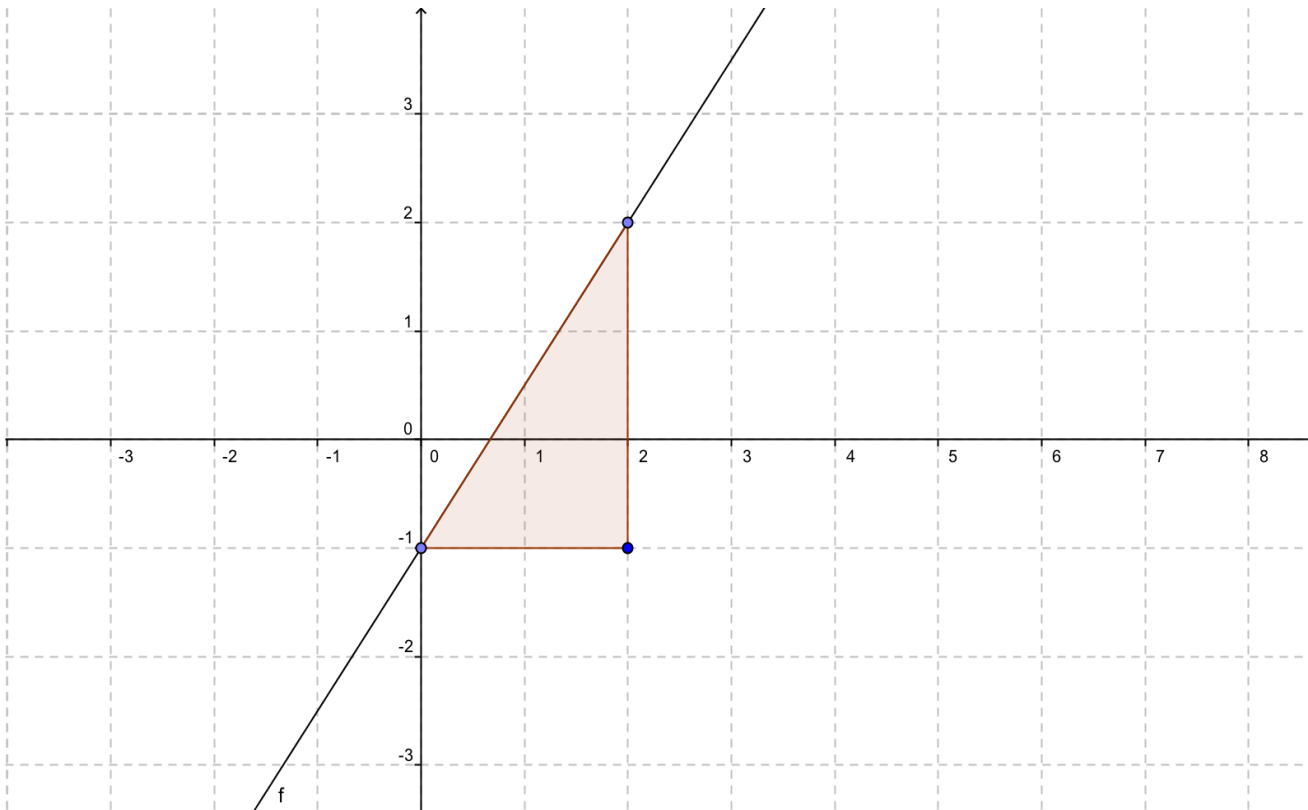
$$m_1 = m_2$$

- Condizioni di **perpendicolarità** tra due rette di equazioni $y = m_1 \cdot x + q_1$ e $y = m_2 \cdot x + q_2$:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Esercizio: dal grafico alla funzione

- Dato il grafico, determinare la rappresentazione algebrica della funzione lineare



Osservando il grafico, in figura si identifica l'intercetta (-1) e il coefficiente angolare $(3/2)$

Funzioni lineari e grafici

- Bastano **due punti** del grafico di una funzione lineare $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1(x_1, y_1)$ per ricavare l'espressione della funzione $f(x) = mx + q$:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \text{e} \quad q = y_0 - mx_0$$

- Viceversa, **data una funzione lineare** $f(x)=mx+q$, è facile tracciarne il grafico: basta considerare due punti le cui coordinate (x, y) soddisfano la condizione $y = mx+q$

Alcune proprietà delle funzioni lineari

- Dominio: $\mathbb{R}$ Immagine: $\mathbb{R}$, o $\{q\}$ se $f(x) = q$ (cioè $m=0$)
- Invertibilità: le funzioni lineari con $m \neq 0$ sono biiettive, quindi invertibili

se $f(x) = mx + q$, allora la funzione inversa è definita da:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{q}{m}$$

- Crescenza/decrecenza : se $m > 0$ la funzione $f(x) = mx + q$ è **crescente** su tutto il suo dominio, mentre se $m < 0$ è **decrescente**

*Le funzioni lineari sono utilizzate quindi per modellizzare tutti quei fenomeni in cui le due grandezze coinvolte si evolvono con una **legge di proporzionalità diretta***

Risoluzione grafica di equazioni e disequazioni lineari

Interpretazione geometrica di equazioni e disequazioni di primo grado:

- risolvere l'equazione $mx+q = 0$ (con $m \neq 0$) significa trovare l'ascissa del punto *di intersezione con l'asse X della retta*, grafico di $f(x) = mx+q$
- risolvere la disequazione $mx+q > 0$ [risp. $mx+q < 0$] equivale a cercare l'insieme delle *ascisse dei punti della retta che si trovano al di sopra* [risp. *al di sotto*] dell'asse X

FUNZIONI QUADRATICHE

- Le **funzioni quadratiche** sono tutte e sole le funzioni **$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$** definite da:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a, b, c \in \mathbf{R} \text{ e } a \neq 0$$

- Il grafico di una funzione quadratica è una ***parabola*** con *asse di simmetria parallelo all'asse Y*

Proprietà del grafico delle funzioni quadratiche

*La **forma del grafico**, cioè della parabola, e la sua **posizione** rispetto agli assi cartesiani dipendono dai valori di a , b e c*

- Se $a > 0$ la parabola ha la **concavità verso l'alto**, se $a < 0$ ha la **concavità verso il basso**
- Il grafico è simmetrico rispetto alla retta $x = -b/2a$ (**asse** della parabola)
- Il punto $V = (-b/2a ; -\Delta/4a)$ con $\Delta = b^2 - 4ac$ è il **vertice** della parabola ed è il punto di minimo (cioè il punto in cui la funzione assume il suo minimo valore) se $a > 0$, oppure di massimo (cioè il punto in cui la funzione assume il suo massimo valore) se $a < 0$
- c individua **l'intersezione della parabola con l'asse Y**: il punto di intersezione è infatti $P = (0, c)$
- **Cosa si può dire della parabola se b o c sono 0?**
Se solo $c = 0$, la parabola passa per l'origine; se solo $b = 0$ la parabola ha vertice sull'asse Y nel punto $(0, c)$; se $b = c = 0$, il vertice della parabola è in $O(0, 0)$

- *Data una funzione quadratica siamo in grado di **disegnare il suo grafico***
- *Viceversa: una funzione quadratica è completamente determinata dalla conoscenza di 3 punti del suo grafico (dipende infatti da tre parametri a, b, c)*

Interpretazione geometrica di equazioni e disequazioni di secondo grado:

- *risolvere l'equazione $ax^2+bx+c=0$ significa trovare le ascisse dei punti di intersezione della parabola, grafico di $f(x)=ax^2+bx+c$, con l'asse X (dipendono dal segno di Δ)*
- *risolvere la disequazione $ax^2+bx+c>0$ [risp. $ax^2+bx+c<0$] equivale a cercare l'insieme delle ascisse dei punti della parabola che si trovano al di sopra [risp. al di sotto] dell'asse delle X*

Esempio: moto di un corpo che cade

Si tratta di un ***moto uniformemente accelerato***

La funzione s che descrive la variazione della coordinata verticale del corpo in funzione del tempo t (cioè la sua altezza rispetto al suolo) è data da

$$s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

dove s_0 è la *posizione iniziale*, v_0 la *velocità iniziale* nella direzione dell'asse verticale e $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ è l'*accelerazione di gravità*

Si tratta di una funzione quadratica il cui grafico è una parabola con la concavità rivolta verso il basso

FUNZIONI POTENZA

Sono funzioni della forma $f(x) = x^\alpha$ dove
l'esponente è un numero reale fissato

Qual è il ***dominio*** di tali funzioni?

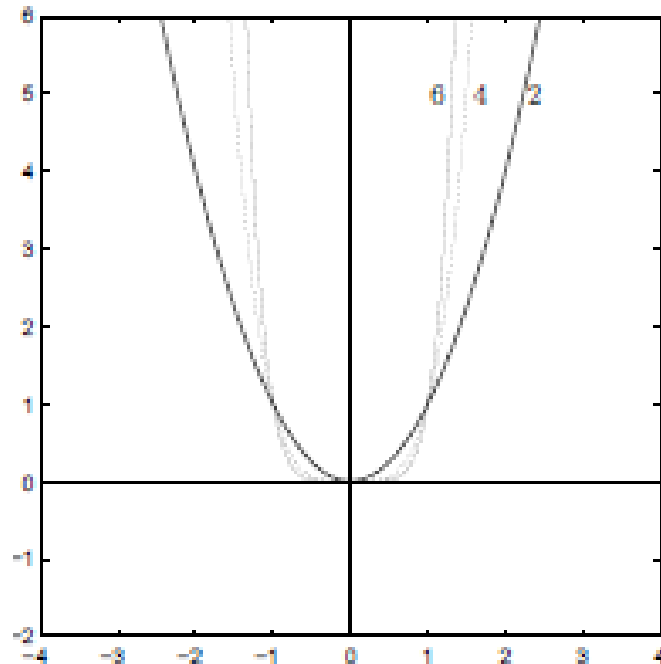
Qual è il loro **grafico**?

Dipende dalla natura dell'esponente!

Funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$ con esponente intero positivo

*Caso I: $f(x) = x^n$, $n > 0$ intero,
 n pari ($n = 2, 4, \dots$)*

Potenze a esponente pari

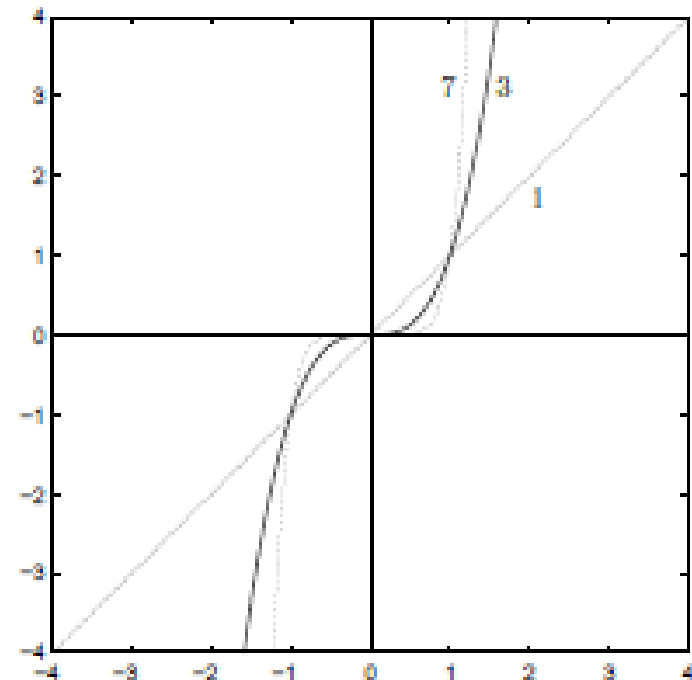


$$y = x^n, n > 0 \text{ pari}$$

$$\text{dom} = \mathbb{R}$$
$$\text{cod} = \mathbb{R}_0^+$$

*Caso II: $f(x) = x^n$, $n > 0$ intero,
 n dispari ($n = 1, 3, 5, \dots$)*

Potenze a esponente dispari



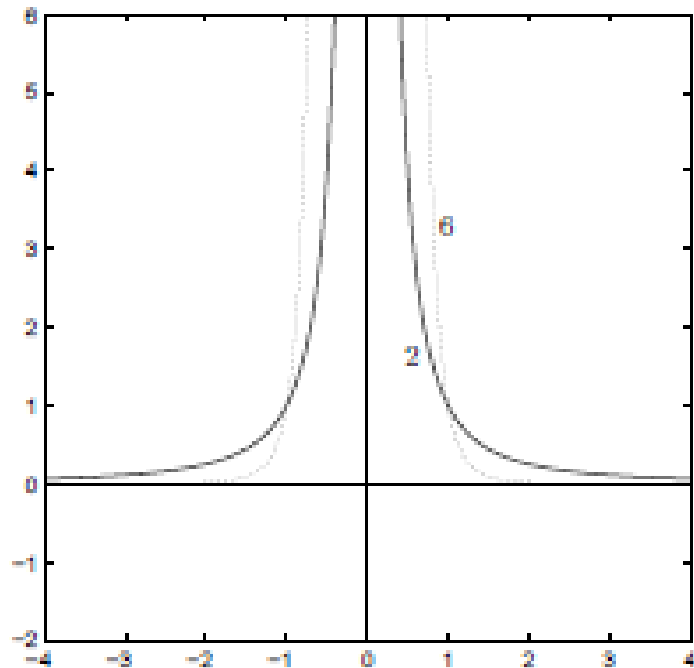
$$y = x^n, n > 0 \text{ dispari}$$

$$\text{dom} = \mathbb{R}$$
$$\text{cod} = \mathbb{R}$$

Funzioni potenza $f(x)=x^\alpha$ con esponente intero negativo

Caso III: $f(x) = x^{-n}$, $n > 0$ intero, n pari ($n = 2, 4, \dots$)

Reciproci di potenze pari

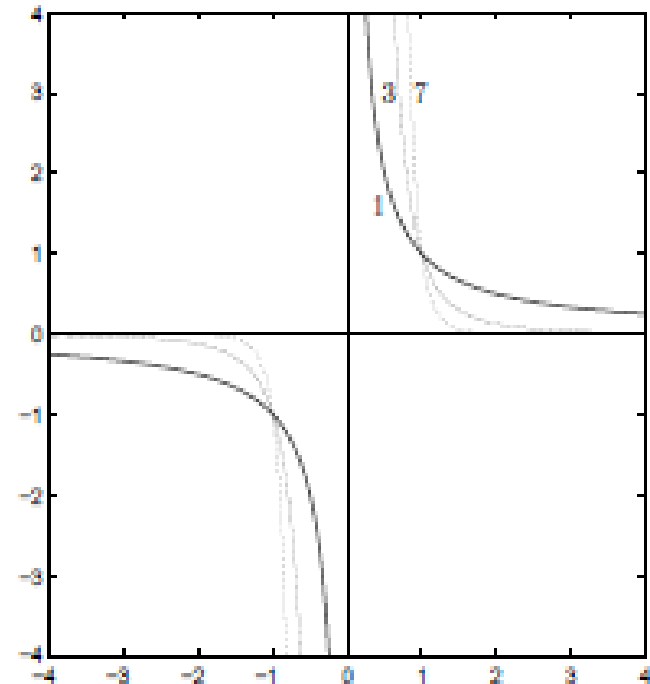


$$y = \frac{1}{x^n}, n > 0 \text{ pari}$$

dom = $\mathbb{R} - \{0\}$
cod = $\mathbb{R}^+$

Caso IV: $f(x)=x^{-n}$, $n > 0$ intero, n dispari ($n = 1, 3, 5, \dots$)

Reciproci di potenze dispari



$$y = \frac{1}{x^n}, n > 0 \text{ dispari}$$

dom = $\mathbb{R} - \{0\}$
cod = $\mathbb{R} - \{0\}$

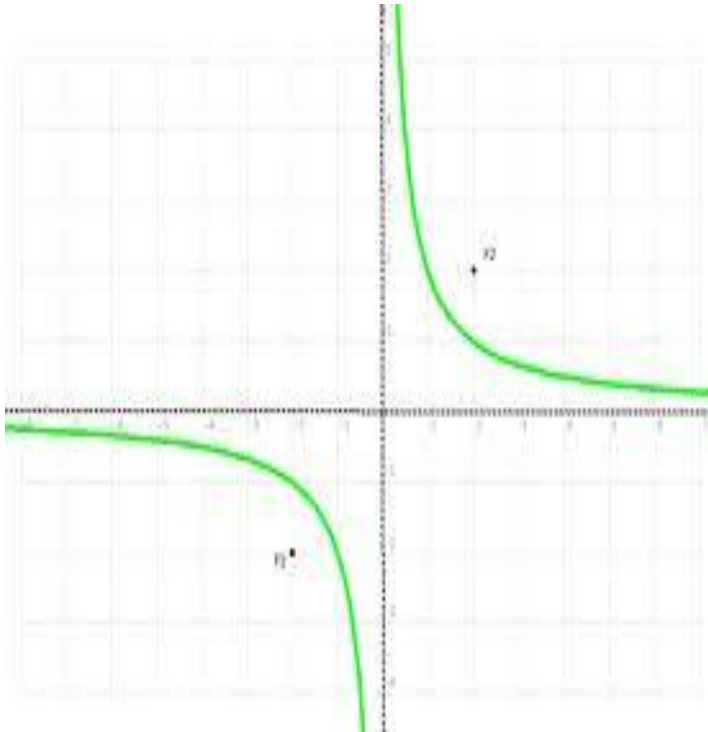
Il caso più generale: $f(x) = a/x = ax^{-1}$, con a reale non nullo

- La funzione $f(x) = a/x = ax^{-1}$ con $a \neq 0$
è il tipo più semplice di **funzione razionale** (o *fratta*)
(caso particolare è $f(x) = 1/x$)
- Rappresenta una **relazione di proporzionalità inversa**: un punto (x, y) appartiene al grafico di f se e solo se $xy = a$, quindi il **prodotto** fra l'argomento ed il valore della funzione è **costante** su tutto il dominio della funzione

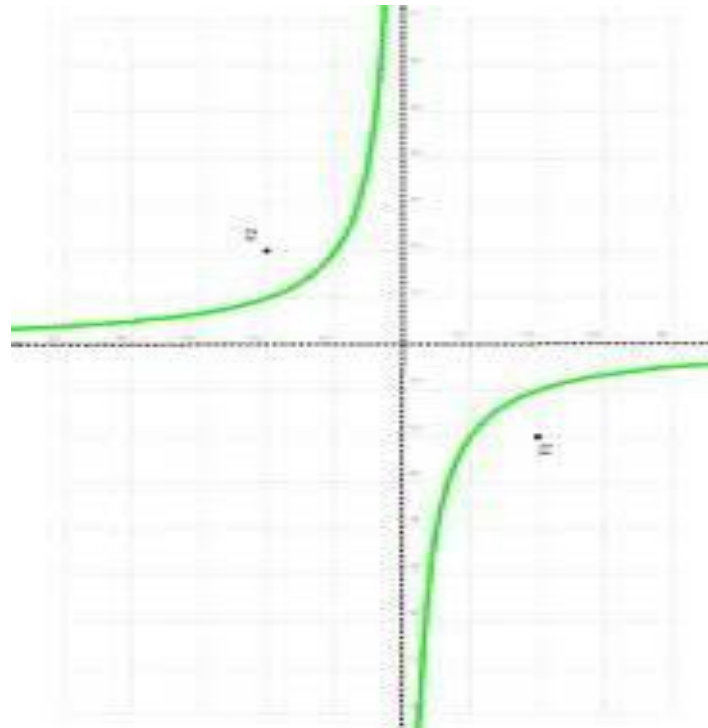
Qual è il grafico di f ? Come influisce l'essere $a > 0$ o $a < 0$?

Si tratta di **un'iperbole equilatera** con gli assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati e il centro di simmetria coincidente con il punto $(0,0)$: il grafico si trova nel I e III quadrante se $a > 0$, e nel II e IV quadrante se $a < 0$

$a > 0$



$a < 0$



Esempio: legge di Boyle per i gas

- Nel 1662 con i suoi esperimenti **Robert Boyle** determinò che

“a temperatura costante, per ogni quantità di gas il prodotto dei valori della pressione e del volume rimane costante”

- Come possiamo esprimere questo con una formula?

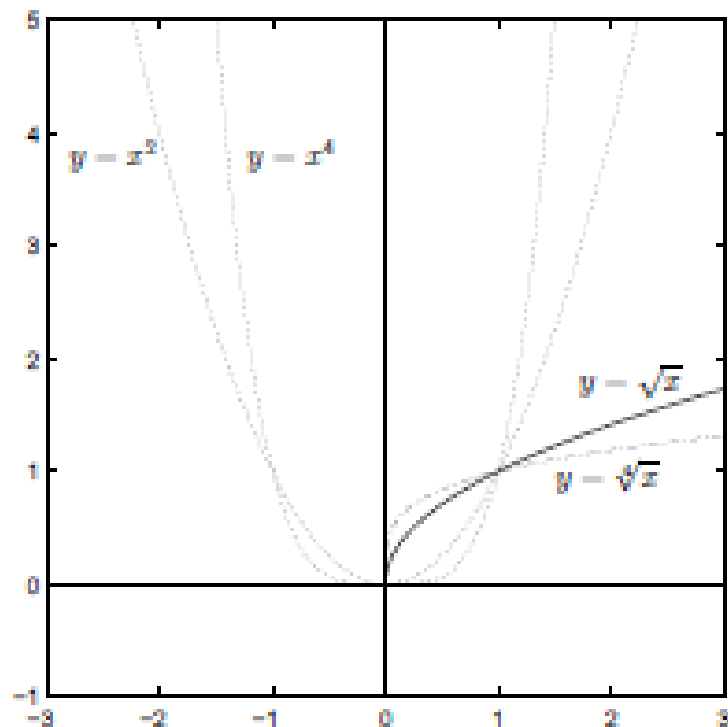
$$V \cdot P = k \quad \text{da cui} \quad V = \frac{k}{P} \quad \text{o} \quad P = \frac{k}{V}, \text{dove } k \text{ è una costante}$$

Il grafico di V in funzione di P (o di P in funzione di V) è un'iperbole equilatera

Funzioni potenza $f(x)=x^\alpha$ con esponente frazionario (>0)

Caso V: $f(x) = x^{1/n}$, $n > 0$ intero, n pari ($n = 2, 4, \dots$)

Radici di indice pari

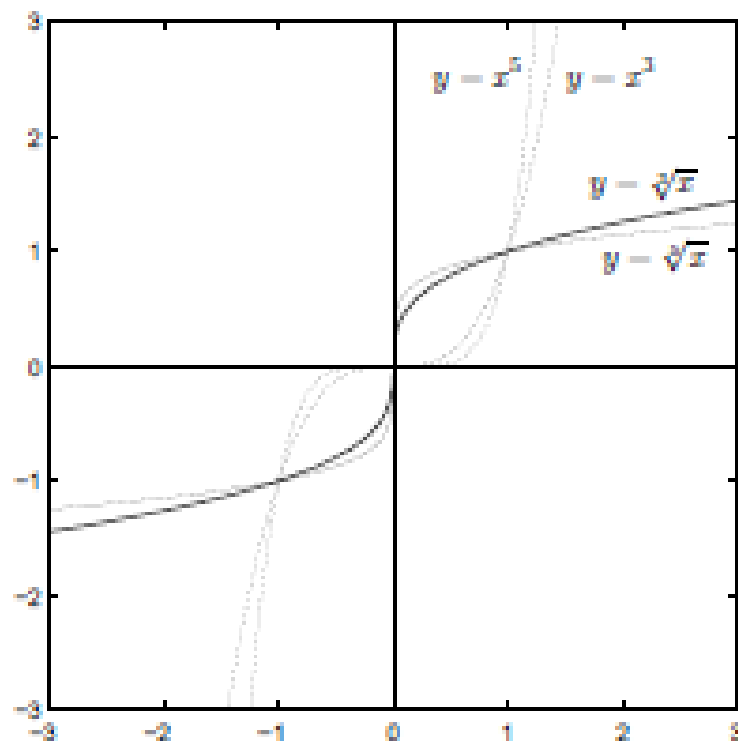


$$y = \sqrt[n]{x}, n > 0 \text{ pari}$$

$$\text{dom} = \mathbb{R}_0^+$$
$$\text{cod} = \mathbb{R}_0^+$$

Caso VI: $f(x) = x^{1/n}$, $n > 0$ intero, n dispari ($n = 1, 3, 5, \dots$)

Radici di indice dispari



$$y = \sqrt[n]{x}, n > 0 \text{ dispari}$$

$$\text{dom} = \mathbb{R}$$
$$\text{cod} = \mathbb{R}$$

FUNZIONI ESPONENZIALI

- Le più semplici *funzioni esponenziali* sono le funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da:

$$f(x) = a^x \quad \text{con } a \in \mathbb{R}, \quad a > 0 \text{ fissato}$$

(a è la base della funzione esponenziale)

Nota

- Se $a = 1$ si ottiene la funzione costante 1, quindi si può considerare come **base $a > 0$ e $a \neq 1$**

Attenzione: non confondere funzioni esponenziali con funzioni potenza

Particolare interesse riveste la seguente funzione esponenziale:

$$f(x) = e^x$$

dove la base **e** è il numero di Nepero

- Il numero **e** è **irrazionale** ed un suo valore approssimato è dato da

$$e \approx 2,718281828459045235$$

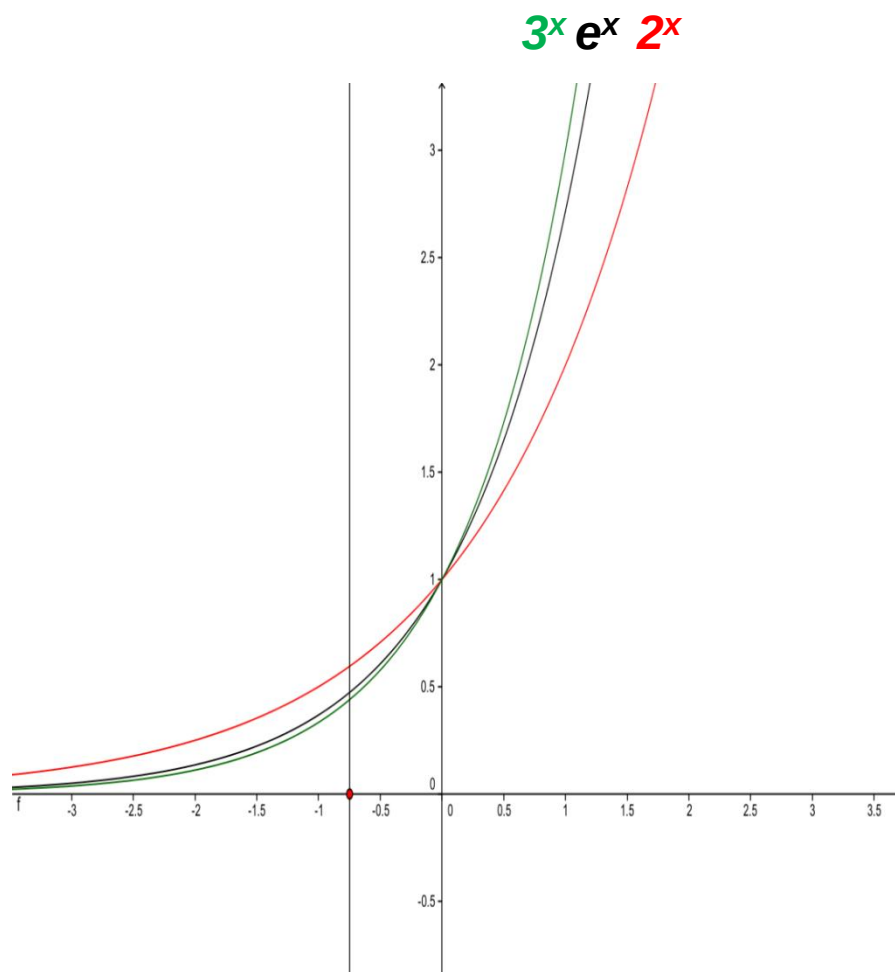
- Si tratta della base più conveniente per il calcolo

Tale numero compare in molte questioni matematiche

Funzioni esponenziali con base $a > 1$

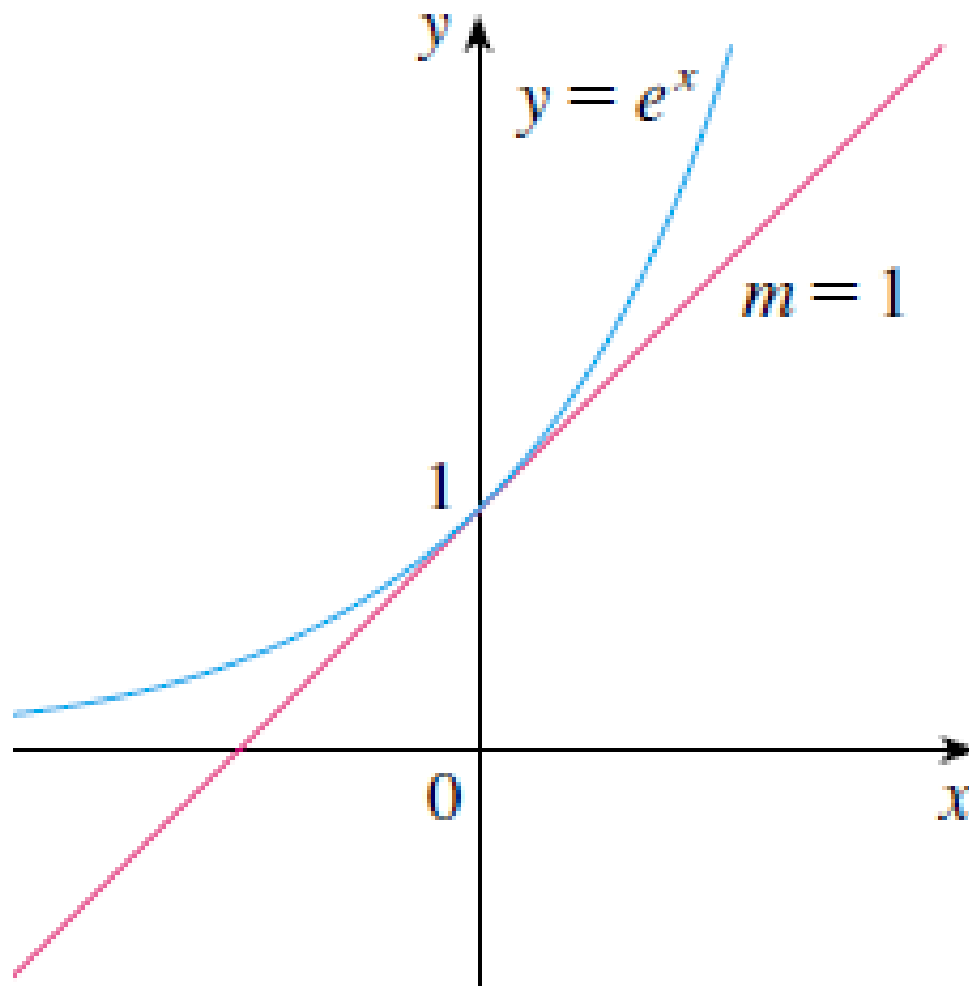
$f(x) = a^x$ con $a > 1$: sono positive e strettamente crescenti su tutto $\mathbb{R}$

- Come varia la variabile dipendente y quando la variabile indipendente x aumenta sempre più o diminuisce sempre più?
[nel primo caso anche y aumenta sempre più, nel secondo caso, y tende verso il valore 0]
- Se $a_1 < a_2$, cosa si osserva dal confronto tra i grafici di
 $y = a_1^x$ e $y = a_2^x$?



[la funzione con base maggiore cresce più rapidamente]

La funzione $f(x)=e^x$: la più conveniente da utilizzare nel calcolo



È la sola funzione esponenziale che gode della proprietà che la pendenza della retta tangente al suo grafico nel punto di intersezione con l'asse y ha valore **1**.

Questo rende la base “e” conveniente per il calcolo perché semplifica alcune formule

Il simbolo **e** per indicare tale base è dovuta ad **Eulero** (1727) e corrisponde alla prima lettera della parola “**esponenziale**”

Quanto rapida è la crescita di una funzione esponenziale con base $a > 1$?

(“esperimento” con $f(x) = 2^x$)

Supponiamo che un foglio di carta *spesso un centesimo di millimetro* venga ripiegato in due parti uguale per 50 volte.

Quale sarà lo spessore della carta dopo questa operazione?

Risposta: $2^{50} \cdot 1/100 = 2^{50}/100$ mm

valore superiore a 11 miliardi di chilometri!

Funzioni esponenziali con base $0 < a < 1$

$f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$: sono positive e strettamente decrescenti su tutto $\mathbb{R}$

- Come varia la variabile dipendente y quando la variabile x aumenta sempre più o diminuisce sempre più?

[nel primo caso y tende verso il valore 0, nel secondo caso, y aumenta sempre più]

- Se $a_1 < a_2$, cosa si osserva dal confronto tra i grafici di

$$y = a_1^x \text{ e } y = a_2^x ?$$

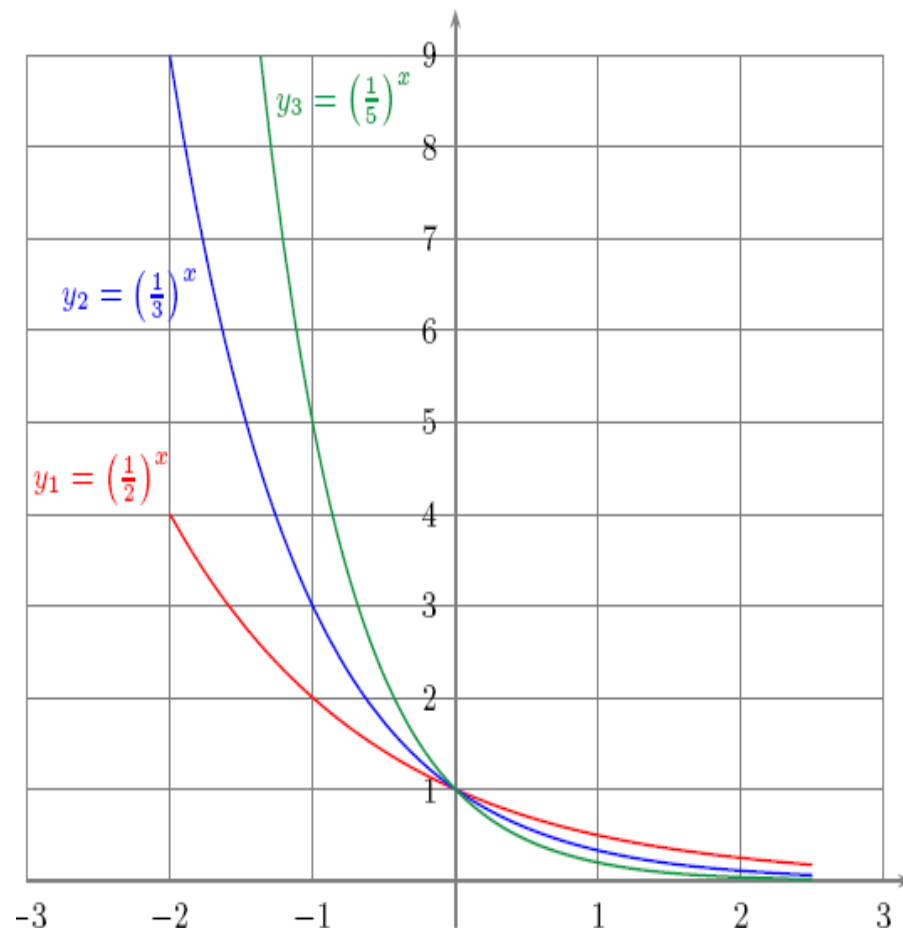


Fig. 2.12 Grafici di $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y_3 = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

[la funzione con base minore decresce più rapidamente]

Alcune proprietà delle funzioni esponenziali

- Tutte le *funzioni esponenziali* $f(x) = a^x$ hanno in comune le seguenti caratteristiche:
 - Dominio: $\mathbb{R}$
 - Immagine: $(0, +\infty)$ (per ogni x , $a^x > 0$)
 - Sono iniettive (elementi distinti hanno immagini distinte)
 - I loro grafici passano tutti per ***il punto (0, 1)***

Dato il grafico di una funzione esponenziale, come si determina il valore della sua base?

In ogni funzione esponenziale, il valore della base è il valore della funzione in 1:

$$f(1) = a$$

Applicazioni delle funzioni esponenziali

- Le funzioni esponenziali sono molto spesso usate come modelli matematici per descrivere numerosi ***fenomeni di accrescimento o di decadimento*** che ***si evolvono con continuità nel tempo*** come, ad esempio:
 - ***crescita di una popolazione***
 - ***decadimento di una data sostanza radioattiva***

La crescita malthusiana

- Una popolazione è malthusiana se ci sono solo due eventi che modificano il numero di individui di cui è composta, la nascita e la morte (*risorse vitali e spazio usufruibile sono supposti illimitati*).
- Un modello per descrivere la variazione della popolazione, cioè la sua dinamica, è dato dalla seguente legge (*crescita malthusiana*):

$$P(t) = P_0 c^t$$

in cui P_0 indica la numerosità iniziale della popolazione e $c=1+a-b$, dove a indica il tasso di natalità e b il tasso di mortalità.

La grande disponibilità di risorse e di spazio porta ad un numero di nascite superiore a quello delle morti, ovvero $a > b$ e quindi $c > 1$.

La funzione esponenziale ha quindi un andamento crescente

Decadimento radioattivo

- Se $N(t)$ è il numero di atomi di una data sostanza radioattiva all'istante t , allora la legge con cui $N(t)$ varia al variare di t è data da:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

dove N_0 rappresenta il numero di atomi presenti all'istante iniziale e λ è una costante positiva, detta ***costante di decadimento***

***La funzione esponenziale ha base compresa tra 0 e 1,
[infatti: $e^{-\lambda t} = (e^{-\lambda})^t = (1/e^\lambda)^t$]
quindi è una funzione decrescente***

FUNZIONI LOGARITMICHE

- Tutte le funzioni esponenziali, qualunque sia la base, sono biettive da $\mathbb{R}$ a $(0, +\infty)$, quindi **invertibili**
- Le funzioni inverse delle funzioni esponenziali sono dette **funzioni logaritmiche**
- Sono le funzioni **$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$** definite da:

$$f(x) = \log_a x \text{ con } a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

dove $\log_a x$, detto **logaritmo in base a di x** (x numero positivo), è quel numero reale y tale $a^y = x$

- **Quale significato ha la parola “logaritmo”?**

“Numero della ragione” (ricordare le progressioni geometriche di ragione a, da cui si originano le funzioni esponenziali a base a)

- **Quando è corretta la scrittura $\log_a x$?**

Si deve avere: $a > 0$, $a \neq 1$ e $x > 0$

In particolare è sempre:

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{e} \quad \log_a a = 1$$

poiché $a^0 = 1$ e $a^1 = a$

Funzioni logaritmiche e loro grafici

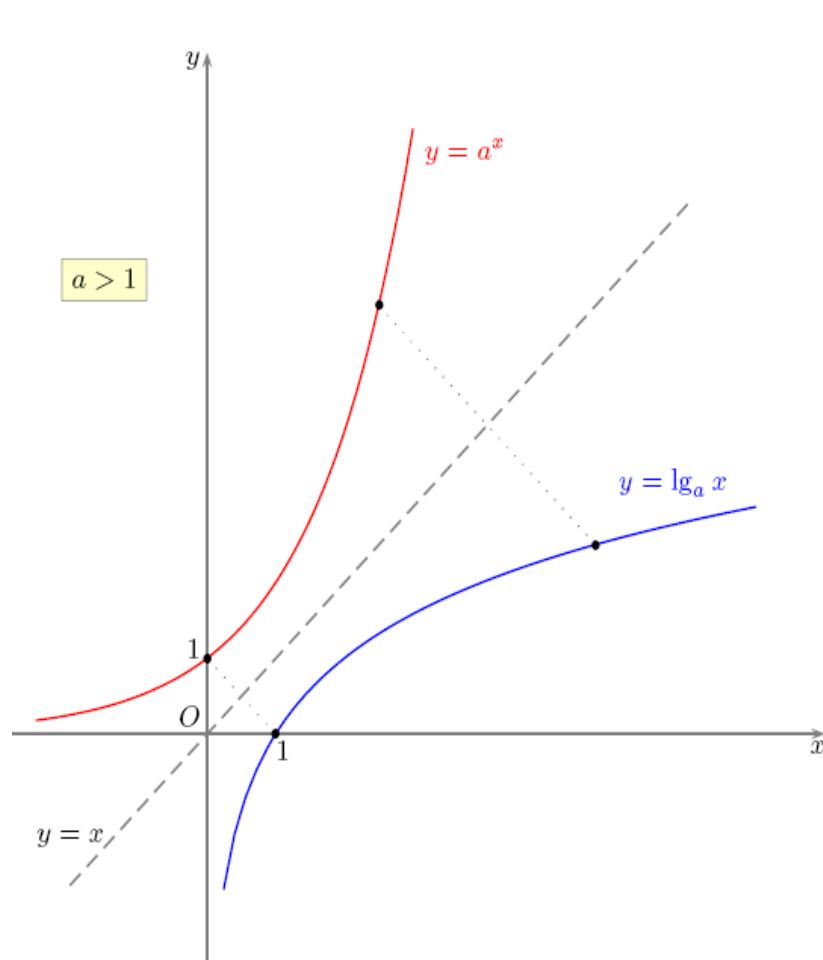


Fig. 2.7 Grafico di $y = \lg_a x$ e $y = a^x$ ($a > 1$).

$a > 1$: funzione crescente

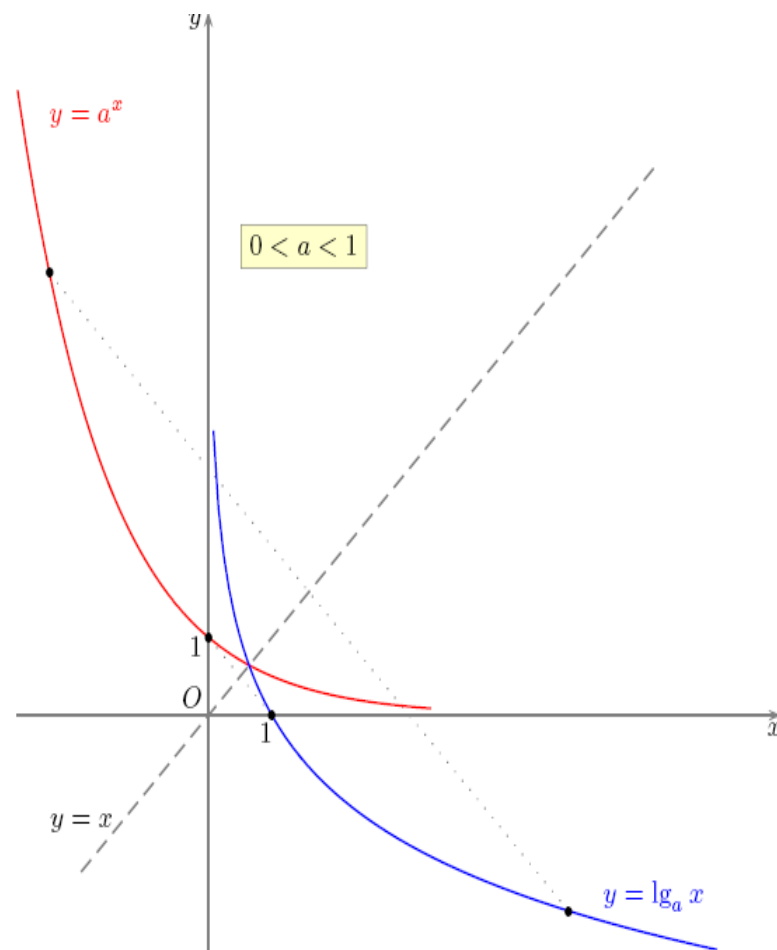


Fig. 2.8 Grafico di $y = \lg_a x$ e $y = a^x$ ($0 < a < 1$).

$0 < a < 1$: funzione decrescente

Alcune proprietà delle funzioni logaritmiche

- *Quali caratteristiche comuni hanno i grafici delle logaritmiche?*
 - Dominio: $(0, +\infty)$
 - Immagine: $\mathbb{R}$
 - Sono iniettive
 - I loro grafici passano tutti per il punto **$(1,0)$**

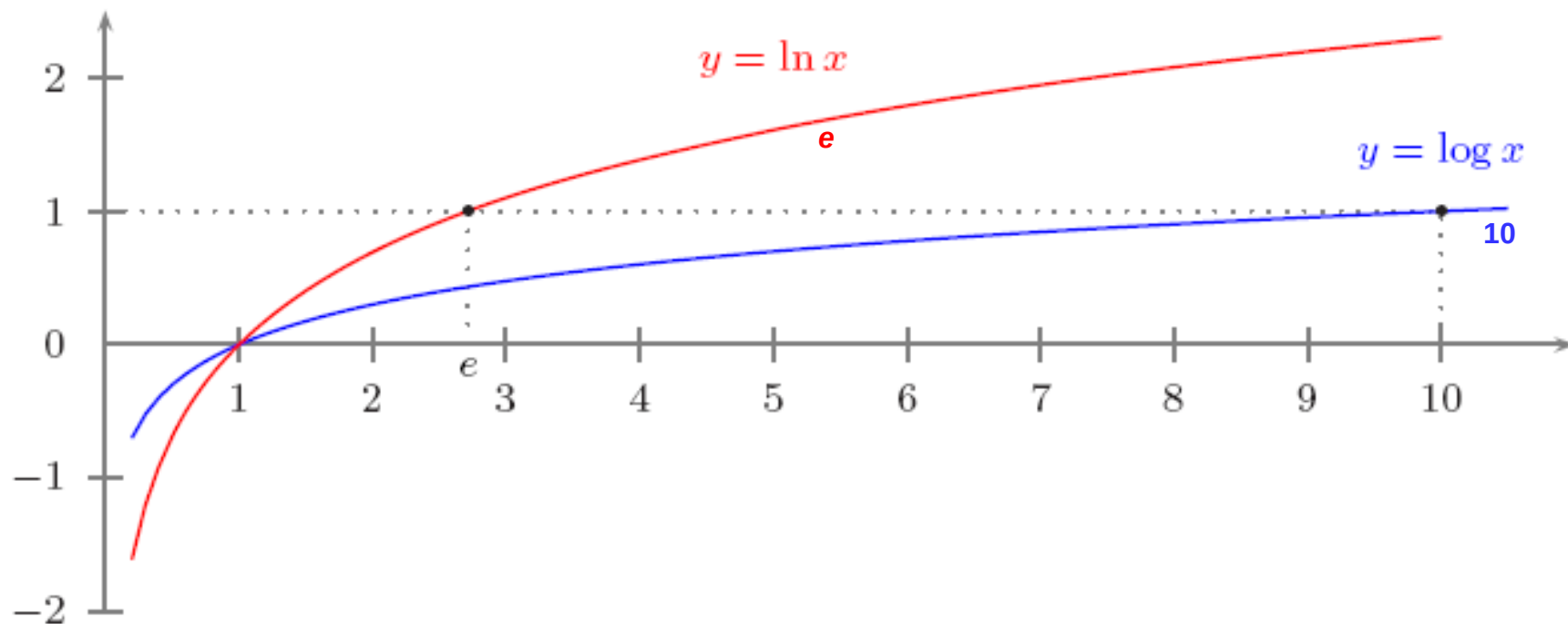


Fig. 2.9 Grafici di $y = \log x$ e $y = \ln x$.

Dato il grafico di una funzione ¹⁰logaritmica, come si determina il valore della sua base ^e?

In ogni funzione logaritmica, il valore della base è il punto del suo dominio in cui la funzione vale 1:

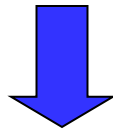
$$\log_a x = 1 \text{ se e solo se } x = a$$

Legami tra funzioni esponenziali e logaritmiche con stessa base

Per essere *funzioni esponenziali e funzioni logaritmiche con la stessa base* inverse una dell'altra, ne deriva che:

$$\log_a a^x = x \text{ per ogni } x \text{ reale}$$

$$a^{\log_a x} = x \text{ per ogni } x \text{ reale positivo}$$



ogni numero reale si è può esprimere in forma di logaritmo e ogni numero reale positivo si può esprimere in forma di potenza

SISTEMI DI LOGARITMI

- **Sistema di logaritmi neperiani o naturali:**
è l'insieme di tutti i logaritmi in base e (è la base più usata nel **calcolo differenziale ed integrale**)
[in simboli: $\ln x$ o $\log x$]
- **Sistema di logaritmi decimali o volgari o di Briggs:**
è l'insieme di tutti i logaritmi in base 10 (è la base più comune in **ambito applicativo**, è legata alla rappresentazione decimale dei numeri e funziona bene con la notazione scientifica)
[in simboli: $\text{Log} x$ o $\log_{10} x$]
- **Sistema di logaritmi a base 2 :**
è l'insieme di tutti i logaritmi in base 2 (usati in **ambito informatico**)

PROPRIETA' DELLE FUNZIONI LOGARITMICHE

(tali proprietà esprimono l'utilità pratica dei logaritmi)

Per ogni $a, b, x, y > 0$ e $a \neq 1, b \neq 1$:

$$1. \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$2. \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$3. \log_a (x^\alpha) = \alpha \cdot \log_a x \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$4. \log_a (\sqrt[n]{x}) = \frac{\log_a x}{n} \text{ (caso particolare della 3. per } \alpha = \frac{1}{n})$$

$$5. \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

(la 5. è nota come formula per il cambiamento di base)

In particolare:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$$

Da tenere presente per il calcolo ...

caso $a > 1$: $x_1 < x_2 \iff a^{x_1} < a^{x_2}$

caso $0 < a < 1$: $x_1 < x_2 \iff a^{x_1} > a^{x_2}$

caso $a > 1$ e x_1, x_2 reali positivi: $x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 < \log_a x_2$

caso $0 < a < 1$ e x_1, x_2 reali positivi: $x_1 < x_2 \iff \log_a x_1 > \log_a x_2$

Principali equazioni e disequazioni:

$$a > 1 \qquad a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \iff f(x) \geq g(x)$$

$$0 < a < 1 \qquad a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \iff f(x) \leq g(x)$$

$$a > 1 \qquad \lg_a f(x) \leq \lg_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \leq g(x) \end{cases}$$

$$0 < a < 1 \qquad \lg_a f(x) \leq \lg_a g(x) \iff \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases}$$

ESERCIZI

35–38 ■ Calcolare il valore esatto di ciascuna espressione.

35. (a) $\log_2 64$ (b) $\log_6 \frac{1}{36}$

36. (a) $\log_8 2$ (b) $\ln e^{\sqrt{2}}$

37. (a) $\log_{10} 1.25 + \log_{10} 80$

(b) $\log_5 10 + \log_5 20 - 3 \log_5 2$

38. (a) $2^{(\log_2 3 + \log_2 5)}$ (b) $e^{3 \ln 2}$

39–40 ■ Ridurre le seguenti espressioni a un singolo logaritmo.

39. $2 \ln 4 - \ln 2$

40. $\ln x + a \ln y - b \ln z$

49–52 ■ Risolvere le equazioni rispetto a x .

49. (a) $2 \ln x = 1$

(b) $e^{-x} = 5$

50. (a) $e^{2x+3} - 7 = 0$

(b) $\ln(5 - 2x) = -3$

51. (a) $2^{x-5} = 3$

(b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

52. (a) $\ln(\ln x) = 1$

(b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, where $a \neq b$

53–54 ■ Risolvere le disequazioni rispetto a x .

53. (a) $e^x < 10$

(b) $\ln x > -1$

54. (a) $2 < \ln x < 9$

(b) $e^{2-3x} > 4$

Risolvere le seguenti disequazioni rispetto ad x:

$$2^{x-1} \cdot 3^{x+1} < 9$$

$$\log_2(x^2 - 3x + 3) > 0$$

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 3 > 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x - 3)$$

Definire le funzioni inverse delle seguenti funzioni:

$$f(x) = 3^{x-2}$$

$$g(x) = \ln(x + 3)$$

$$h(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Definizioni delle funzioni numeriche seno e coseno

- Considerata nel piano cartesiano una circonferenza di raggio 1 e centro nell'origine $O=(0, 0)$ (*circonferenza goniometrica*), sia $A=(1,0)$ il suo punto di intersezione con il semiasse positivo delle X.
- Sia $x \in \mathbb{R}$. Se $x > 0$, a partire dal punto A, si percorre la circonferenza in *senso antiorario* fino a descrivere un arco di lunghezza x (*compiendo più di un giro nel caso in cui x superi la misura della circonferenza*) e sia P_x il punto di arrivo.

Se $x < 0$, a partire dal punto A, si percorre la circonferenza in *senso orario* fino a descrivere un arco di lunghezza $|x|$ e sia P_x il punto di arrivo.
- Se $x = 0$, $P_0 = (1,0) = A$.

La costruzione precedente associa ad ogni numero reale x uno ed un solo punto P_x della circonferenza goniometrica, quindi permette di definire una funzione (non numerica).

A partire dalla funzione $x \longrightarrow P_x$ vengono definite due nuove funzioni, questa volta numeriche, entrambe di dominio $\mathbb{R}$.

funzione seno: $x \longrightarrow \text{ordinata di } P_x = \text{sen} x$

$$f(x) = \text{sen} x$$

funzione coseno: $x \longrightarrow \text{ascissa di } P_x = \text{cos} x$

$$f(x) = \text{cos} x$$

OSSERVAZIONE

Ogni arco AP_x di misura x sottende un angolo al centro della circonferenza goniometrica la cui **misura in radianti** è proprio la **misura dell'arco**, cioè x

Ricordiamo infatti che

- Gli angoli si misurano in **gradi** (l'unità di misura è l'*angolo grado*) o in **radianti** (l'unità di misura è l'*angolo radiante*)
- Un **angolo radiante**, o **radiante**, è l'angolo al centro di una circonferenza che stacca sulla circonferenza un arco di lunghezza uguale al raggio (*tra arco e raggio, il rapporto è 1*).
- Se il raggio della circonferenza misura 1, un **angolo radiante** stacca sulla circonferenza un arco lungo 1



***Un arco di circonferenza unitaria di misura x ,
individua un angolo al centro di x radianti!*** 50

Corrispondenza tra la misura in gradi e quella in radianti degli angoli più comuni

- Dato un angolo α , si ha: **$180 : \pi = \text{mis}_{(o)} \alpha : \text{mis}_{(\text{rad})} \alpha$**
- In particolare, si ricava che:

$$\mathbf{1 \text{ rad}} = (180/\pi)^\circ \sim 57^\circ 17' 44,8''$$

$$\mathbf{1^\circ} = (\pi/180) \text{ rad} \sim 0,017 \text{ rad}$$

Dalla misura in gradi a quella in radianti di un angolo e viceversa

Gradi	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
Radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Grafici delle funzioni seno e coseno: sinusoide e cosinusoide

funzione seno: $y = \operatorname{sen} x$

funzione coseno: $y = \operatorname{cos} x$

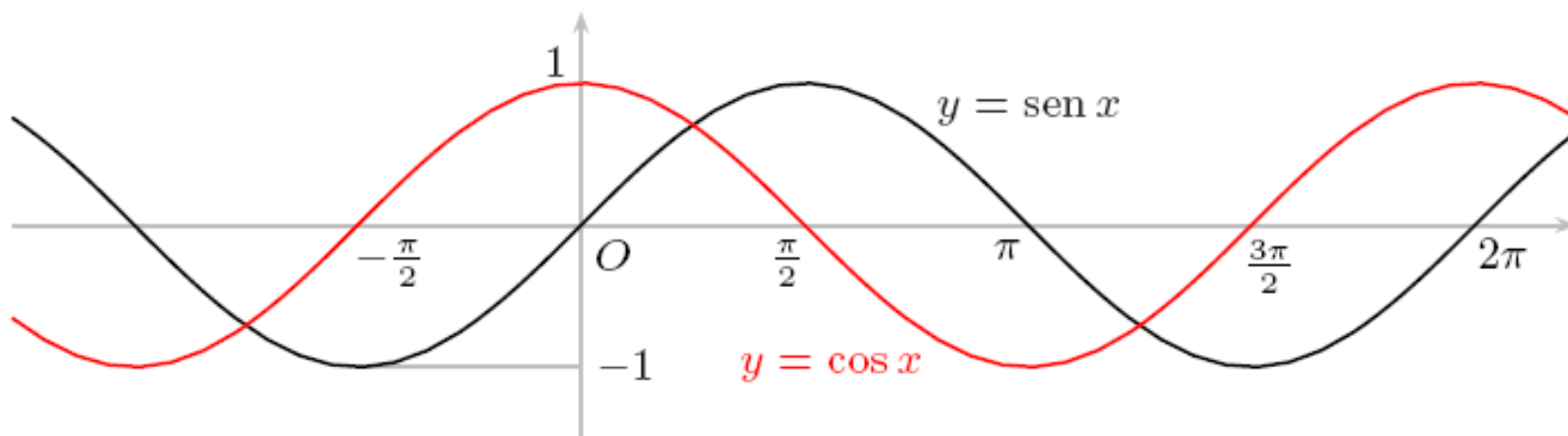
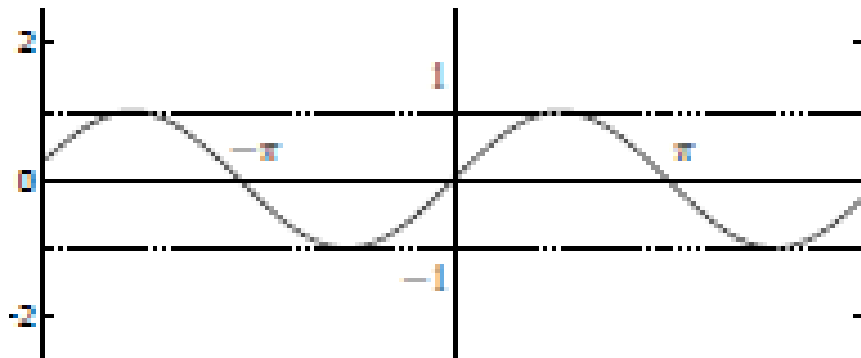


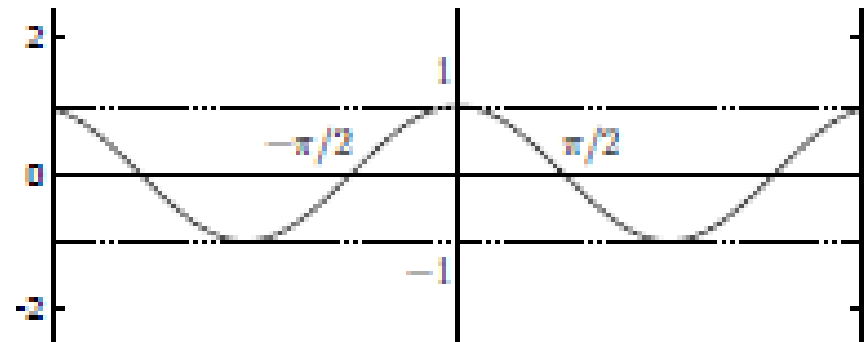
Fig. 1.1. Grafici del seno e del coseno.

Proprietà delle funzioni seno e coseno

- Dominio: $\mathbb{R}$ Immagine: $[-1, 1]$
- Il seno è funzione dispari, il coseno è funzione pari
- Sono entrambe funzione periodiche di periodo 2π
[per ogni x , $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ e $\cos(x + 2\pi) = \cos x$]
- Non sono iniettive
- La funzione seno (nell'intervallo $[0, 2\pi]$): cresce in $(0, \pi/2)$ e in $(3\pi/2, 2\pi)$; decresce in $(\pi/2, 3\pi/2)$; punti di massimo: $x = \pi/2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; punti di minimo: $x = -\pi/2 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
- La funzione coseno (nell'intervallo $[0, 2\pi]$): cresce in $(\pi, 2\pi)$; decresce in $(0, \pi)$; punti di massimo: $x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$; punti di minimo: $x = \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$



$y = \sin x$



$y = \cos x$

Come varia la variabile dipendente y quando la variabile x aumenta sempre più o diminuisce sempre più?

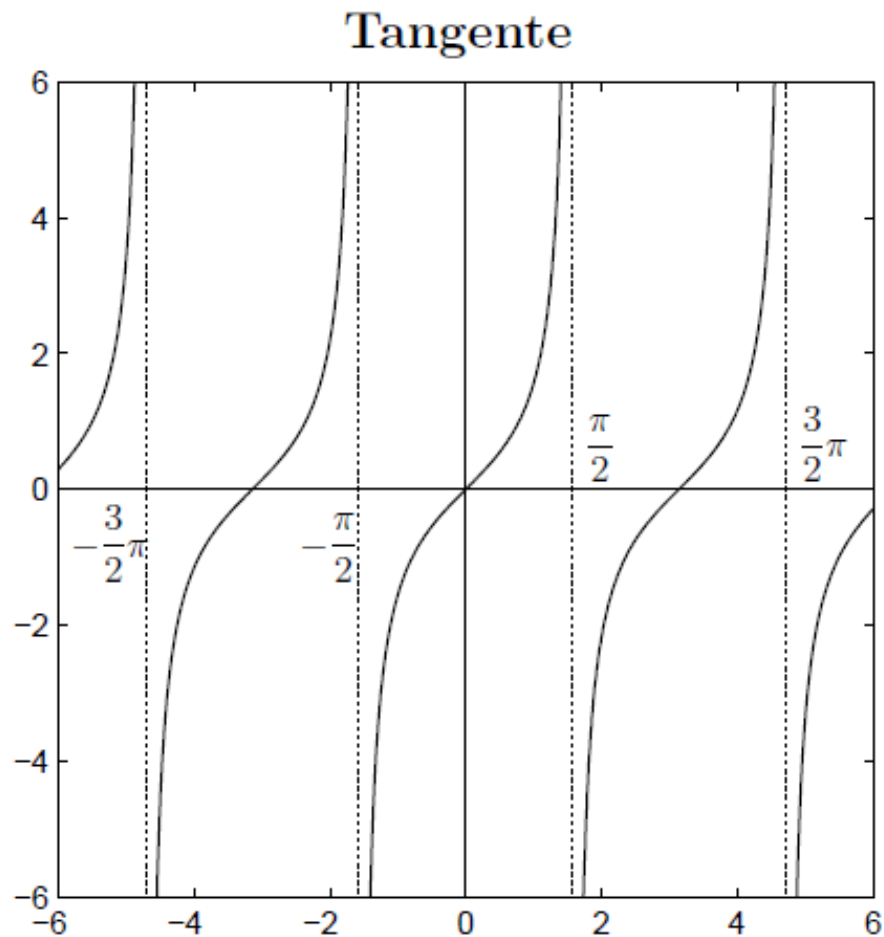
Nota: la loro natura periodica rende queste funzioni adatte a descrivere **fenomeni ripetitivi**, quali maree, onde sonore, moti di molle oscillanti

Funzione tangente

$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$
= ordinata di C

(con C punto di intersezione della retta tangente in A (1,0) alla circonferenza goniometrica con la semiretta OP_x)

- È funzione dispari
- È periodica di periodo π [per ogni x , $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$]
- Non è iniettiva
- È crescente in ogni intervallo del dominio



$$y = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{dom} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

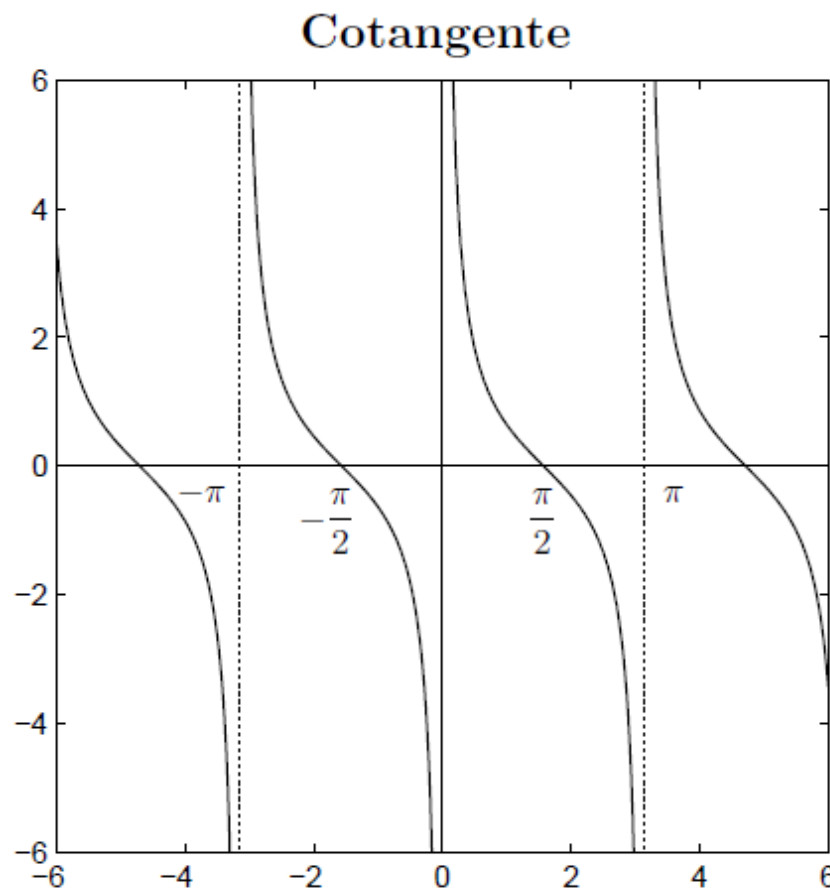
$$\operatorname{cod} = \mathbb{R}$$

Funzione cotangente

$$y = \cotgx = \cos x / \sen x = 1/\tgx = \text{ascissa di } S$$

(con S punto di intersezione della retta tangente in $B(1,0)$ alla circonferenza goniometrica con la semiretta OP_x)

- È funzione dispari
- È periodica di periodo π
[per ogni x , $\cotg(x+\pi) = \cotgx$]
- Non è iniettiva
- È decrescente in ogni intervallo del dominio



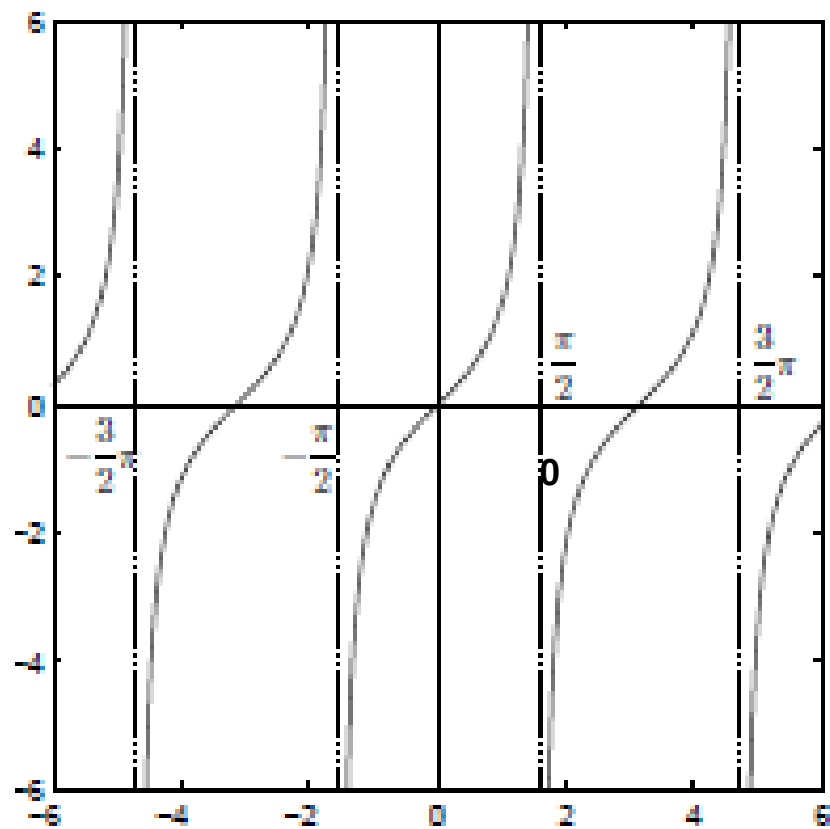
$$y = \cotg x$$

$$\text{dom} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{cod} = \mathbb{R}$$

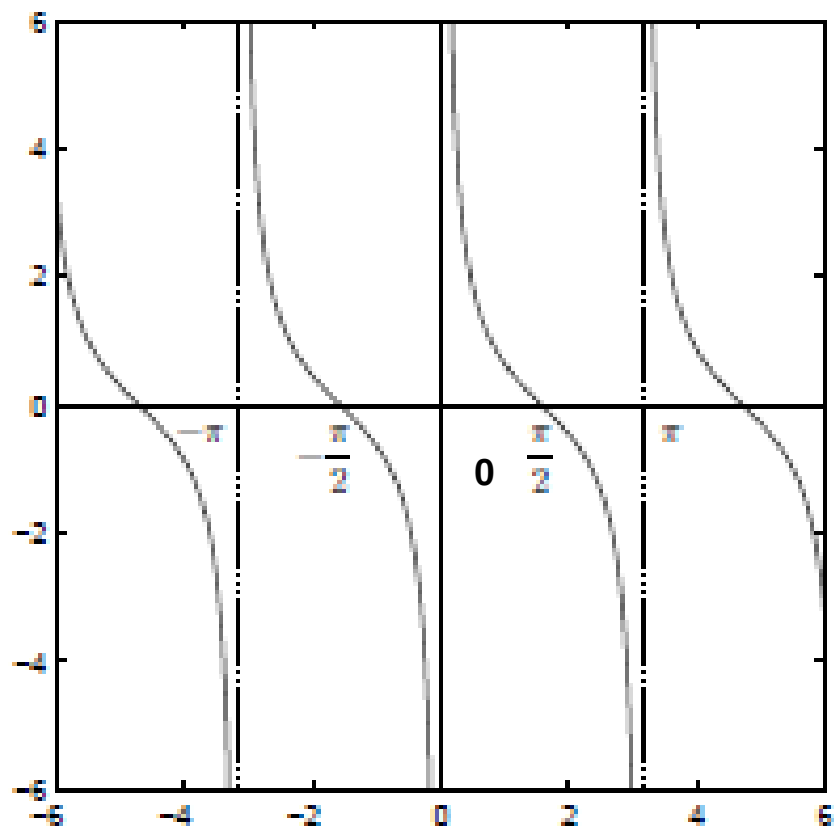
- *Come varia la variabile dipendente y quando la variabile x aumenta sempre più o diminuisce sempre più?*
- *E nell'intorno dei punti in cui le funzioni non sono definite?*

Tangente



$$y = \operatorname{tg} x$$

Cotangente



$$y = \operatorname{cotg} x$$

Alcune identità trigonometriche

- Relazione fondamentale:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

- *Formule di addizione e sottrazione*

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

- *Formule di duplicazione*

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

L'inversa della funzione seno: la funzione arcoseno

Per convenzione si considera invertibile la funzione seno in $[-\pi/2, \pi/2]$

La funzione inversa, $f(x)=\arcsen x$ è definita in $[-1,1]$ e la sua immagine è $[-\pi/2, \pi/2]$

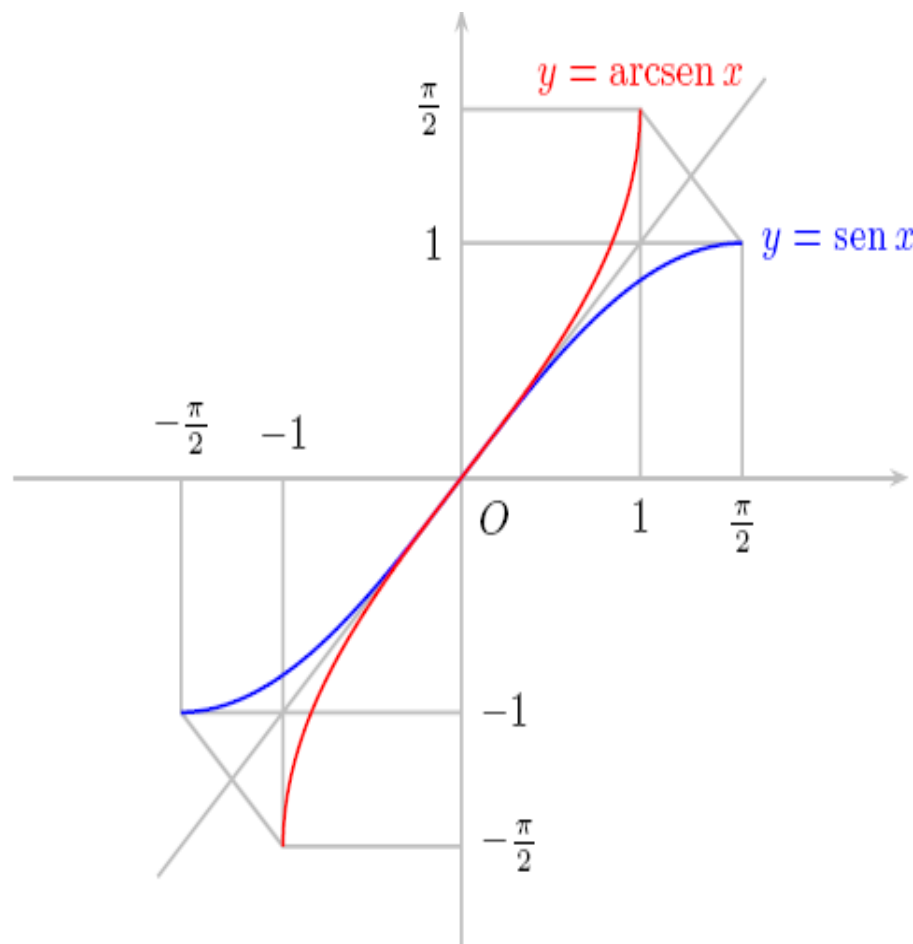


Fig. 1.3. Grafici del seno, dell'arcoseno e proprietà di simmetria.

L'inversa della funzione coseno: la funzione arcocoseno

Per convenzione si considera invertibile la funzione coseno in $[0, \pi]$

La funzione inversa, **$f(x)=\arccos x$** è definita in $[-1,1]$ e la sua immagine è $[0, \pi]$

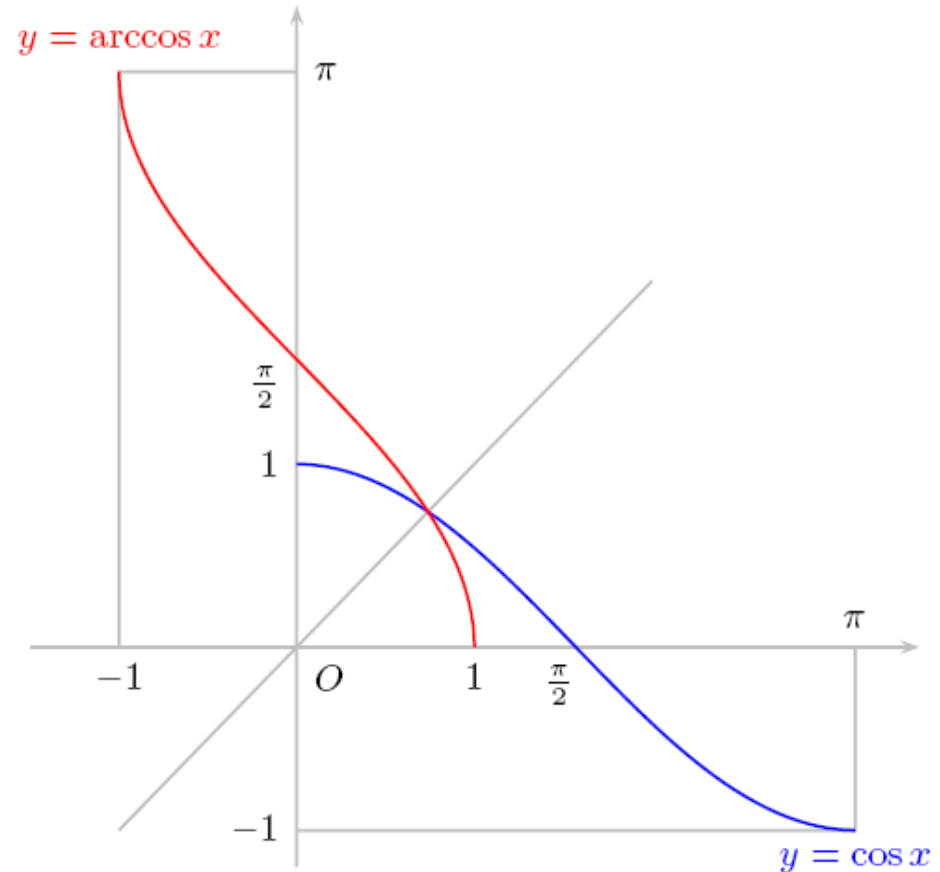


Fig. 1.5. Grafici del coseno e dell'arcocoseno.

L'inversa della funzione tangente: la funzione arcotangente

Per convenzione si considera invertibile la funzione tangente in $(-\pi/2, \pi/2)$

La funzione inversa, **$f(x) = \operatorname{arctg} x$** è definita in $\mathbb{R}$ e la sua immagine è $(-\pi/2, \pi/2)$

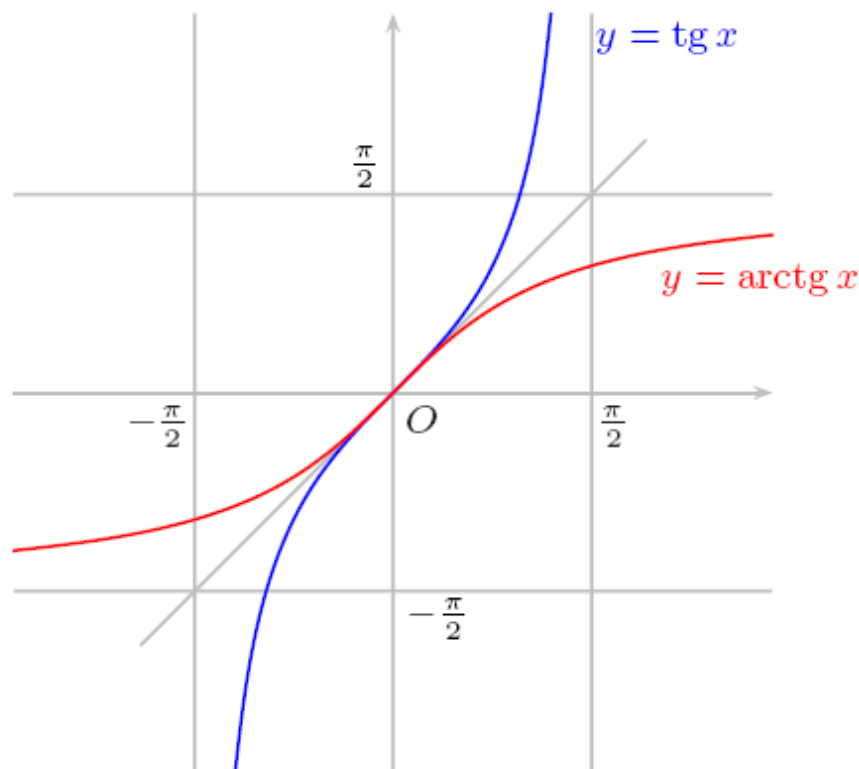
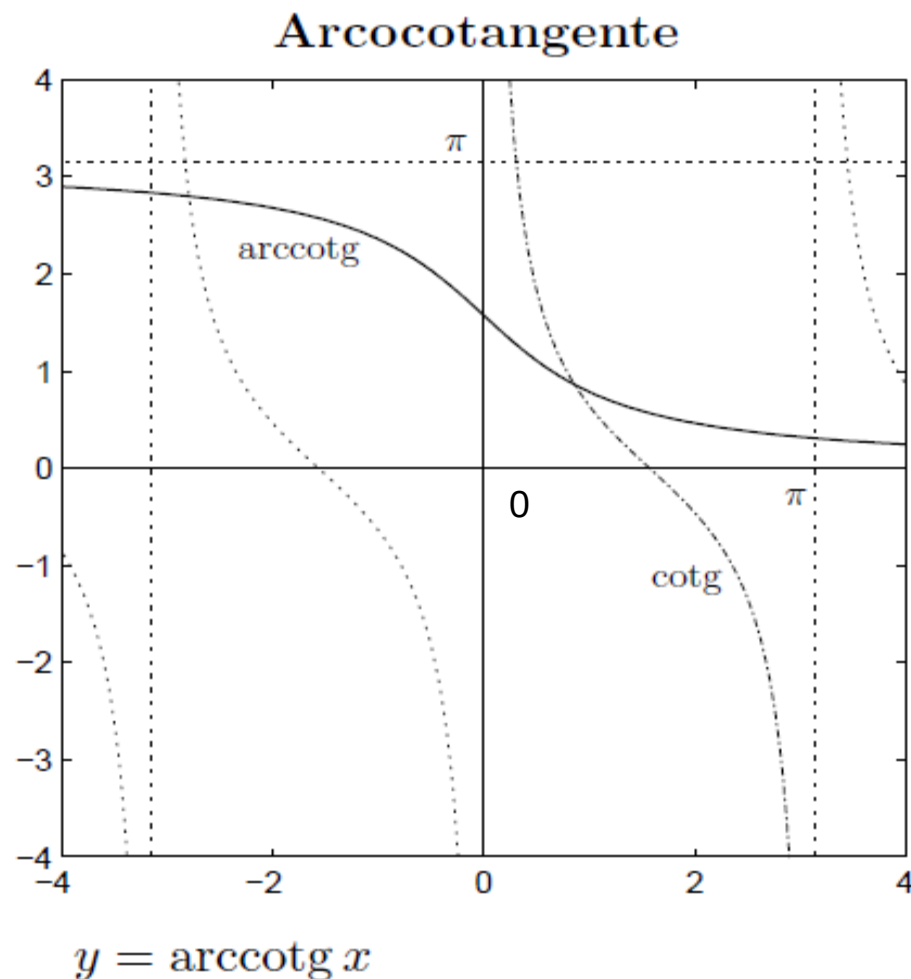


Fig. 1.6. Grafici della tangente e arcotangente.

L'inversa della funzione cotangente: la funzione arccotangente

Per convenzione si considera invertibile la funzione cotangente in $(0, \pi)$

La funzione inversa, **$f(x) = \operatorname{arccotg} x$** è definita in $\mathbb{R}$ e la sua immagine è $(0, \pi)$



$$\text{dom} = \mathbb{R}$$

$$\text{cod} =]0, \pi[$$