

ISTITUZIONI DI MATEMATICHE E FONDAMENTI DI BIOSTATISTICA

1. Elementi di teoria degli insiemi

A. A. 2014-2015

L.Doretti

Secondo il matematico tedesco **Cantor** (1845-1918), il vocabolo ***insieme*** va usato in riferimento a:

"una collezione di oggetti, determinati e distinti, della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico; tali oggetti si dicono elementi dell'insieme"

I concetti di *insieme* e quello di *appartenenza* si accettano come **concetti primitivi** (rimangono cioè indefiniti e servono come punto di partenza per le definizioni successive)

Simboli (*per insiemi, per elementi e per appartenenza o non appartenenza*)

$x \in A$: x appartiene o è elemento dell'insieme A

$y \notin B$: y non appartiene o non è elemento dell'insieme B

Modi di denotare un insieme

- in modo esplicito: **per elencazione**, indicando uno ad uno i suoi elementi

$$A = \{a, b, c, d\}$$

- in modo implicito, facendo riferimento ad una *proprietà P* che ne caratterizza gli elementi

$$B = \{x / x \text{ soddisfa la proprietà } P\}$$

In questo secondo caso si dice che l'insieme è denotato **per comprensione**

Insiemi uguali

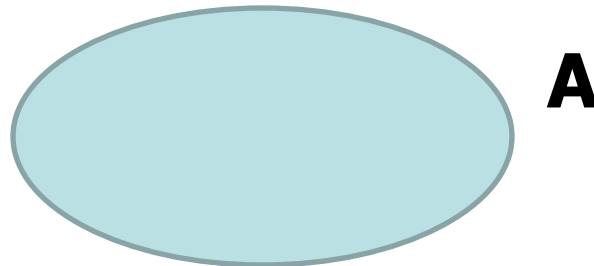
Due insiemi A , B sono **uguali**, in simboli **$A = B$** se e solo se hanno gli stessi elementi, ovvero:

$A = B$ se, per ogni x , $x \in A$ se e solo se $x \in B$

Diagramma di Venn

Un modo per rappresentare insiemi consiste nell'uso dei **diagrammi di Venn**.

Ad ogni *insieme* viene fatta corrispondere una parte di piano delimitata da una linea chiusa e si intende che gli elementi dell'insieme siano in questa parte di piano



Cardinalità di un insieme

Dato un insieme finito A , si definisce ***cardinalità di A*** , e si indica con $|A|$, il numero degli elementi di A

Nota: nella Teoria degli insiemi si estende il *concetto di cardinalità* anche agli insiemi infiniti e si distingue, nell'ambito dell'infinito, tra diversi livelli di grandezza

Insieme vuoto

L'***insieme vuoto***, indicato con il simbolo $\emptyset$, è l'insieme privo di elementi (ha cardinalità 0)

Esercizi

1. Dire quali delle seguenti espressioni denotano insiemi:

- gli studenti meno bravi
- le persone più alte
- i numeri primi
- le lettere dell'alfabeto italiano
- le automobili più veloci
- gli studenti laureati a Siena nell'anno 2013

2. Denotare attraverso una proprietà i seguenti insiemi:

$$\begin{array}{ll} A = \{1, 2, 3, 4, 5\} & B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \\ C = \{-5, 5\} & D = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \end{array}$$

3. Indicare quali fra i seguenti insiemi sono uguali:

$A = \{0, 1, 2\}$; $B = \{a, b, c\}$; $C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\}$;

$D = \{c, b, a\}$; $E = \{x \mid x \text{ vocale di gatto}\}$; $F = \{a, o, c\}$; $G = \{a, o\}$

4. Siano A e B i due seguenti insiemi $A = \{1, 2, x\}$, $B = \{2, 3, y\}$. Come devono essere definiti x e y affinché i due insiemi siano uguali?

5. Quali tra i seguenti insiemi sono vuoti?

$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x^2 - 1 < 0\}$.

$B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ è pari e } 0 < x < 2\}$

$C = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 + 1 = 0\}$

$D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 0\}$

$E = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } x^2 \geq 0\}$

$F = \{x \mid x \text{ è dispari ed è multiplo di } 4\}$

Inclusione fra insiemi

Dati due insiemi A e B , si dice che A è **sottoinsieme** di B , o che A è **incluso** in B , e si scrive $\mathbf{A \subseteq B}$, se ogni elemento di A è anche elemento di B , ovvero:

$A \subseteq B$ se, per ogni x , se $x \in A$ allora $x \in B$

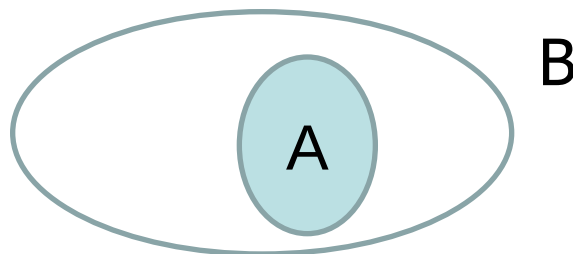
- *La relazione di inclusione è soddisfatta nel caso in cui $A = B$*
- *Viceversa: per avere l'uguaglianza tra due insiemi, essi devono includersi vicendevolmente, ovvero:*

$A = B$ se e solo se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

- *Per ogni insieme A , si ha:*

$\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$

- Due insiemi A e B sono **inconfrontabili** rispetto all'inclusione se nessuno dei due insiemi è sottoinsieme dell'altro (cioè non vale $A \subseteq B$ e non vale $B \subseteq A$)
- Se si vuole indicare il fatto che $A \subseteq B$ e $A \neq B$ allora si scrive **$A \subset B$** e si dice che A è ***incluso strettamente in B*** o che A è ***sottoinsieme proprio*** di B
- Rappresentazione grafica dell'inclusione tra insiemi ($A \subset B$)



Attenzione: non confondere il simbolo di inclusione ($\subseteq$, $\subset$) con quello di appartenenza ($\in$)!

OPERAZIONI INSIEMISTICHE

Unione

Dati due insiemi A e B , si definisce l'insieme **unione** di A e B, e si indica con $\mathbf{A \cup B}$ nel seguente modo:

$$\mathbf{A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}}$$

(la congiunzione o è intesa in senso inclusivo, ovvero ha il significato del "ve/" latino)

Intersezione

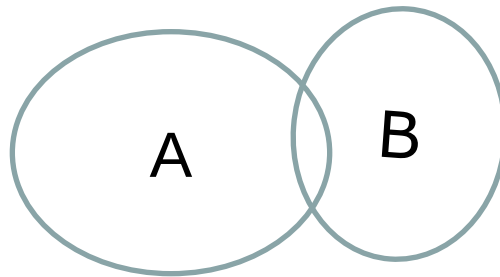
Dati due insiemi A e B , si definisce **intersezione** di A e B, e si indica con $\mathbf{A \cap B}$ il seguente insieme:

$$\mathbf{A \cap B = \{x / x \in A \text{ e } x \in B\}}$$

- Se $A \cap B = \emptyset$, allora A e B si dicono **disgiunti** (o **separati**)



Nota: se accade che A e B non sono disgiunti e sono inconfrontabili allora si dice che sono in **posizione generica**



- Vale la seguente proprietà (cardinalità dell'insieme unione):

$$|\mathbf{A} \cup \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| - |\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$$

Differenza

Dati due insiemi A e B , si definisce ***differenza*** di A e B, e si indica con ***A – B*** il seguente insieme:

$$\mathbf{A - B = \{x / x \in A \text{ e } x \notin B\}}$$

Insieme complementare

Dato un insieme A, si definisce ***complementare di A***, e si indica con ***A^C***, *il seguente insieme*

$$\mathbf{A^C = \{x / x \notin A\}}$$

Nota: l'operazione di complementazione è relativa ad un certo insieme che costituisce *l'universo del discorso* che quasi sempre è sottinteso e che varia a seconda del contesto.

Se si indica con U tale **insieme universo**, si ha che

$$A^c = \{x / x \in U \text{ e } x \notin A\} = U - A$$

L'operazione di complementazione è quindi un caso particolare dell'operazione di differenza

Esercizi

6. Individuare quali dei seguenti insiemi sono sottoinsiemi dell'insieme

$A = \{x / x \in \mathbb{N}, x \text{ è multiplo di 3 e divisibile per 5}\}$:

$$B = \{3, 5\} \quad C = \{15\} \quad D = \{15, 45, 65\}$$

$$E = \{30, 90\} \quad F = \{x / x \in \mathbb{Z} \text{ e } x - 75 = 0\}$$

$$G = \{x / x \in \mathbb{Z} \text{ e } x^2 - 900 = 0\}$$

$$H = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x^2 - 225 = 0\}$$

7. Considerati gli insiemi $A = \{x / x \in \mathbb{Z} \text{ e } -3 \leq x \leq 10\}$
e $B = \{x / x \in \mathbb{N} \text{ e } x \text{ è divisore di } 10\}$, determinare:

i) $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$

ii) A^C , rispetto all'insieme universo $\mathbb{Z}$

iii) B^C , rispetto all'insieme universo $\mathbb{N}$

PROPRIETÀ delle OPERAZIONI INSIEMISTICHE

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

associatività unione

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

associatività intersezione

$$A \cup B = B \cup A$$

commutatività unione

$$A \cap B = B \cap A$$

commutatività intersezione

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

distributività unione

rispetto ad intersezione

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

distributività intersezione

rispetto ad unione

$$A \cup A = A$$

idempotenza unione

$$A \cap A = A$$

idempotenza intersezione

$$(A^c \cup B^c) = (A \cap B)^c$$

prima legge di De Morgan

$$(A^c \cap B^c) = (A \cup B)^c$$

seconda legge di De Morgan

$$(A^c)^c = A$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$A \cup A^c = U$$

Gli insiemi come strumenti per
rappresentare e modellizzare
situazioni problematiche

Esercizio 8

In un istituto superiore ogni docente di discipline scientifiche insegna due materie. Matematica è insegnata da 15 docenti, fisica da 12, chimica da 10. Inoltre si sa che 4 docenti insegnano sia matematica che fisica, 3 matematica e chimica, 2 fisica e chimica.

Quanti sono in totale i docenti di matematica, chimica e fisica dell'istituto?

Risposta: 28

Esercizio 9

In un campione di 6000 donne vietnamite, 2535 avevano nel sangue l'antigene A (*e quindi gruppo sanguigno A oppure AB*), 2244 avevano nel sangue l'antigene B (*e quindi gruppo sanguigno B oppure AB*), e 1812 non avevano alcun antigene (*gruppo sanguigno 0*).

Quante donne del campione avevano gruppo sanguigno AB?

Risposta: 591

Esercizio 10

In un campione di 300 studenti universitari è emerso che:

- tutti conoscono almeno una lingua straniera fra inglese, francese e tedesco
- 225 conoscono l'inglese, 80 il francese e 33 sia l'inglese che il francese
- 40 studenti conoscono il tedesco e nessuno di questi conosce il francese.

Quanti studenti del campione conoscono sia l'inglese che il tedesco?

Risposta: 12