

RIEPILOGO SUL CALCOLO DEI LIMITI

Fatta eccezione per le forme di indeterminazione, il calcolo dei limiti di funzioni numeriche si può effettuare ricorrendo a:

- conoscenza delle funzioni elementari (grafico e loro proprietà)
- riconoscimento della continuità di una funzione
- teorema sulle operazioni con i limiti (tabella relativa ai limiti di funzioni somma, differenza, prodotto e quoziente)
- In certi casi, le forme di indeterminazione si possono superare ricorrendo ad opportuni strumenti (vedi esercizi)

ESERCIZI: CALCOLO DEI LIMITI

A) I limiti del tipo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, quando è possibile stabilire che la funzione f è continua in x_0 , possono essere calcolati tenendo presente che, in tal caso, si ha: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Esempi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctg(x)}{\ln(1+x^2)} \quad \left[\frac{\pi}{4 \ln 2} \right] \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos x}} \quad [1]$$

$$\lim_{x \rightarrow e} \ln[\ln(2x - e)] \quad [0] \qquad \lim_{x \rightarrow 2} (3^x + x^3 - 2x^2 + x - 6) \quad [5]$$

B) Se si devono calcolare limiti per $x \rightarrow \pm\infty$, oppure limiti del tipo $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nel caso in cui f non è definita in x_0 , oppure si presenti in una forma indeterminata, possono sorgere difficoltà. In questi casi è molto utile trarre profitto dalla conoscenza dei grafici delle funzioni elementari

Esempi

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x}{(x-1)^2} \qquad \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{e^x}{(x-5)^3} \qquad \lim_{x \rightarrow 5^+} \ln(x-5) \qquad \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} \frac{1}{\cos x} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2x) + \frac{1}{x} \quad [+\infty]; \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot gx - \ln x) \quad [+\infty];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x + \arctg \frac{1}{x}) \quad [1 + \frac{\pi}{2}] \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{2}{x+3}} \quad [0]$$

C) Se si presentano forme indeterminate, è opportuno tenere presente che, talvolta, mediante un'adeguata trasformazione dell'espressione analitica della funzione, si può eliminare la forma indeterminata che in essa compare.

Caso funzioni polinomiali: quando per $x \rightarrow \pm\infty$, si presenta la forma di indeterminazione $+\infty-\infty$, la trasformazione da fare, prima del calcolo del limite è la seguente:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right)$$

Caso funzioni razionali (cioè quozienti di due funzioni polinomiali): la procedura da seguire è quella sopra indicata sia per il polinomio al numeratore che per quello al denominatore, poi si semplificano le potenze di x evidenziate, infine si passa al calcolo del limite.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 5x + 1) \quad [-\infty] \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{3x^3 - 2x^2 + 6} \quad [0] \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2}{2x^2 - x - 1} \quad [+\infty]$$

Uso del limite notevole: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad [1]; \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \left[\frac{1}{2} \right]; \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} \quad [0]$$

ALTRI ESERCIZI

Continuità e discontinuità di una funzione

1. Determinare il numero reale a affinché la funzione f sia continua su tutto $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{se } x \geq 0 \\ x^3 + a & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

2. Spiegare perché le seguenti funzioni sono discontinue nel punto $a = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x < 1 \\ 4 - x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Studio iniziale di funzione

3. Determinare dominio, segno ed intersezione con gli assi, limiti delle funzioni seguenti:

$$f(x) = \ln^2(x+3)$$

$$g(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

$$h(x) = e^{\frac{1}{x+1}}$$

4. Determinare i seguenti limiti, dopo aver prima disegnato i grafici delle funzioni considerate:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\frac{1}{5}} x =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_5 x =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt[3]{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{10} x =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) =$$